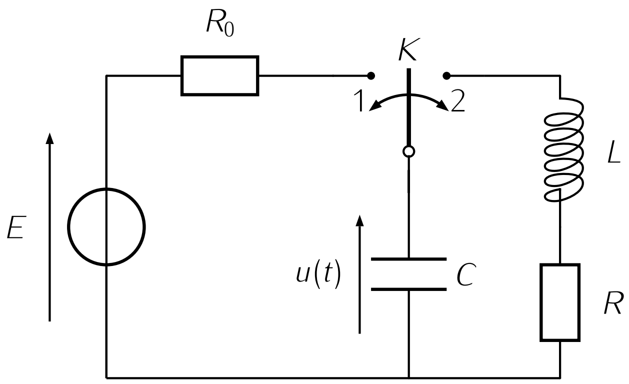
Attention :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Tout résultat non justifié sera systématiquement considéré comme faux.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Les résultats non homogènes seront sanctionnés.

Régimes transitoires de circuits RC et RLC série



1. Initialement l'interrupteur est en position 2 depuis un temps très longtemps. En déduire que le
Q1 condensateur est déchargé. Justifier.

À $t = 0$, l'interrupteur est basculé en position 1 (on a alors un circuit RC série). Le générateur délivre une tension continue E. On note $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur.

Q2 2. Déterminer (en justifiant) la condition initiale $u(t = 0^+)$.

3. Déterminer l'équation différentielle pour la tension $u(t)$ pour $t > 0$. Donner le temps caractéris-
Q3 tique τ.

Q4 4. En déduire l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$.

Q5 5. Tracer $u(t)$ pour $t > 0$ et indiquer sur la courbe le temps caractéristique τ.

On suppose maintenant que l'interrupteur est initialement en position 1 et que le régime permanent est atteint. À $t = 0$, l'interrupteur est basculé en position 2 (on a alors un circuit RLC série en régime libre). On note toujours $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur.

Q6 6. Déterminer (en justifiant) les conditions initiales $u(t = 0^+)$ et $\frac{du}{dt}$ à $t = 0^+$.

7. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$. Montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0$$

Q7 Déterminer les expressions de ω_0 et Q.

8. On suppose que le circuit est en régime apériodique.

   (a) Donner (en justifiant) la condition sur le facteur de qualité Q pour l'établissement d'un régime
Q8 apériodique.

(b) En déduire l'expression de $u(t)$ en fonction de ω_0, Q et de deux constantes d'intégration (que
Q9 l'on ne détermine pas pour l'instant).

(c) Déterminer les expressions des temps caractéristique d'amortissement τ_1 et τ_2 en fonction de
Q10 ω_0 et Q.

Q11 (d) Déterminer les constantes d'intégration en fonction de E et Q.

9. Tracer l'allure de $u(t)$.

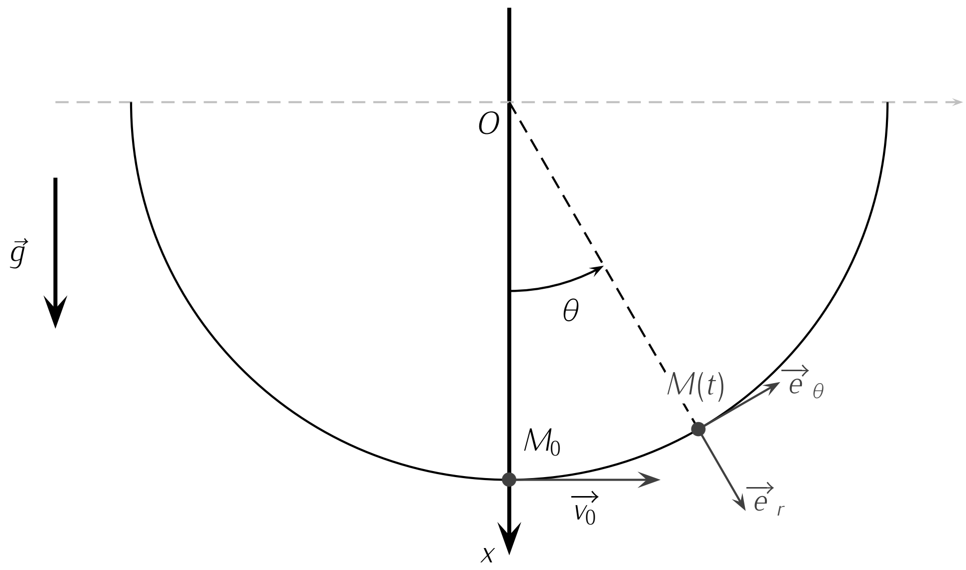
Q12 10. Déterminer les énergies initiales et finales du condensateur.

Q13 11. Déterminer les énergies initiales et finales de la bobine.

Q14 12. Faire un bilan de puissance. En déduire (en justifiant) l'énergie dissipée dans la résistance R.

Mouvement pendulaire amorti

Un petit objet assimilé à un point matériel M, de masse m, peut glisser sans frottement le long d'un rail ayant la forme d'un demi-cercle de centre O et de rayon R, placé dans un plan vertical.



On repère la position du point M à l'instant t par l'angle $\theta(t) = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}(t))$.
À l'instant $t = 0$, l'objet est lancé du point M_0 avec une vitesse $\vec{v}_0$.
Dans tout le problème, on utilisera une base de projection polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On prendra pour valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 10$ m.s^{-2}.

Q15 1. Faire l'inventaire des forces appliquées à M, et les représenter sur un schéma clair lorsque le point est dans une position $M(t)$ quelconque. On précisera les composantes de ces forces sur la base polaire.

Q16 2. Exprimer l'accélération de M dans la base polaire. Justifier.

Q17 3. En déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\theta(t)$.

Q18 4. On suppose que la norme v_0 du vecteur vitesse initial est suffisamment faible pour que la condition $\theta(t) \ll 1$ rad soit satisfaite à chaque instant. Déterminer complètement l'expression de $\theta(t)$ dans cette hypothèse en fonction de v_0, g, R et t.

On suppose à partir de maintenant que le point M subit au cours de son mouvement une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$, où λ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du point M à l'instant t. La condition $\theta(t) \ll 1$ rad reste également satisfaite à chaque instant.

Q19 5. Établir la nouvelle équation différentielle satisfaite par la fonction $\theta(t)$.

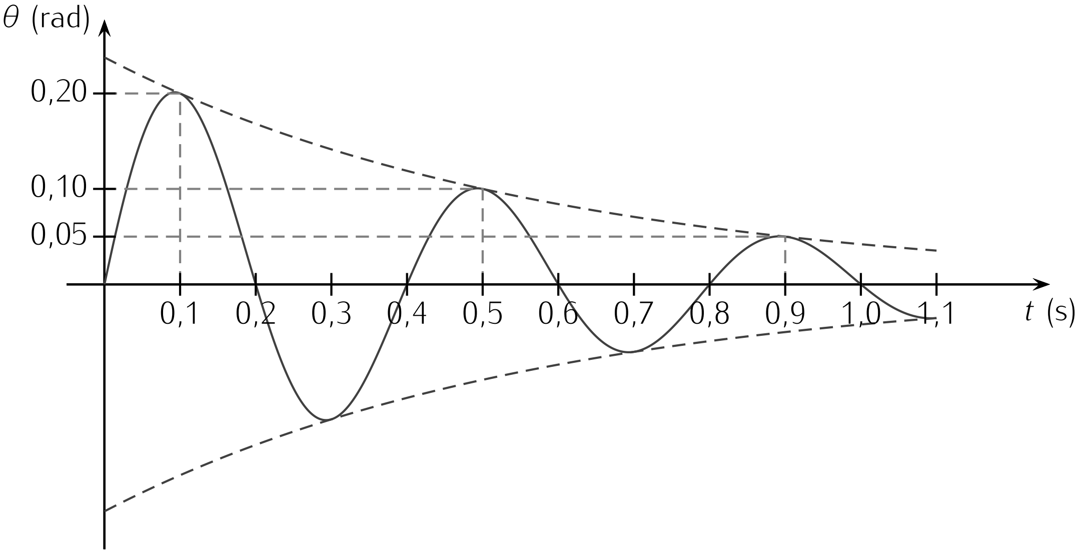
Q20 6. Les grandeurs m, g et R étant fixées, donner la condition portant sur λ pour que le mouvement soit pseudo-périodique.

Q21 7. Cette condition étant réalisée, exprimer $\theta(t)$ sous la forme :

$$\theta(t) = A\exp(-\frac{t}{\tau})\sin(\Omega t)$$

On justifiera soigneusement l'établissement de cette relation et on exprimera A, τ et Ω en fonction de v_0, m, g, R et λ.

8. L'allure de la courbe représentative des variations de la fonction $\theta(t)$ est donnée ci-dessous.



On appelle décrément logarithmique la grandeur sans dimension

$$\delta = ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$$

où T est la pseudo-période et t le temps.

Q22 (a) Exprimer λ en fonction de δ, m et T.

Q23 (b) Par lecture graphique, déterminer la valeur de T.

Q24 (c) Par lecture graphique, déterminer la valeur de δ.

Q25 (d) En déduire la valeur de λ (sans omettre de préciser son unité), sachant que $m = 100$ g.

Distance de freinage

Le document ci-dessous est un extrait d'un flyer édité par la sécurité routière en mai 2018. On peut notamment y lire la phrase suivante : « baisser la vitesse de 10 km/h sur les routes à double sens sans séparateur central pourrait permettre de sauver 350 à 400 vies chaque année » selon une étude menée par une équipe d'accidentologues indépendants (étude complète disponible sur www.conseil-national-securite-routiere.fr). C'est dans cette logique que la limitation de vitesse sur route sans séparateur en France est passé de 90 km/h à 80 km/h le 1er juillet 2018.

1. On veut montrer que les données indiquées sur le document sont incompatibles entre elles avec un modèle de freinage du véhicule par frottement solide avec le sol sans prendre en compte le temps de réaction du conducteur.

Q26 (a) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la voiture.

(b) Appliquer la seconde loi de Newton, la projeter et en déduire que la distance de freinage est
Q27 $d = \frac{v_0^2}{2fg}$ où f est le coefficient de frottement pneu/route.

(c) À partir des deux dessins du premier encart, et de la réponse précédente, trouver deux valeurs du coefficient de frottement pneu/route. Est-ce que ces deux valeurs trouvées sont compatibles ?
Q28

(d) Est-ce que la valeur de la vitesse présentée dans le deuxième encart est cohérente avec les
Q29 précédents résultats et un temps de réaction nul ?

Q30 2. Montrer que ses données sont bien compatibles entre elles avec un modèle de freinage par frottement solide en prenant en compte un temps de réaction du conducteur égal à une seconde. Calculer la valeur numérique du coefficient de frottement de glissement utilisé dans le modèle.

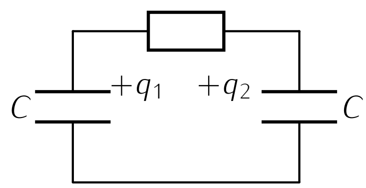
Régimes transitoires de circuits RC et RLC série

1. Initialement l'interrupteur est en position 2 depuis un temps très longtemps. On a donc un circuit à une maille RLC à considérer. Le condensateur est donc équivalent un interrupteur ouvert : le courant dans la maille de droite est nul. On en déduit que la tension aux bornes de R est nulle. En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil, donc la tension à ses bornes est nulle. D'après la loi des mailles, $u(t) = u_L + u_R = 0 + 0 = 0$ (tensions à définir sur un schéma pour avoir le sens). La tension aux bornes du condensateur est donc nulle et le condensateur est déchargé
Q1 et donc $\boxed{u(t = 0^-) = 0}$.

Attention à l'argument : « il n'y a pas de générateur depuis longtemps, donc le condensateur est déchargé ». De façon général, cet argument n'est PAS suffisant. Voir par exemple l'exercice intéressant ci-dessous. Lorsque $t \to \infty$, le condensateur ne se décharge pas complètement, et ce malgré un circuit fermé et une résistance dans le circuit. Il est vrai que pour un condensateur réel, la charge sera nulle au bout d'un temps assez long à cause de la résistance de fuite, mais cela peut prendre plusieurs jours et dans cet exercice il s'agit de condensateur « théoriques » , parfaits et ce phénomène n'est donc a priori pas pris en compte.

Exercice intéressant :

Le circuit est composé de deux condensateurs de même capacité. À l'instant $t = 0$, l'interrupteur K ferme le circuit où un des condensateurs (celui de gauche) a été préalablement chargé sous la tension U_0 et l'autre est déchargé.
On appelle $q_1(t)$ et $q_2(t)$ les charges respectives des condensateurs à l'instant t.



(a) Déduire des relations entre le courant et les charges que la somme des charges ne dépend pas du temps : $q_1(t) + q_2(t)$ est constant.

(b) Déterminer la charge de chaque condensateur à l'équilibre, c'est à dire après un temps assez long pour que le courant puisse être considéré comme nul.

(c) Déterminer les énergies E_{C1} et E_{C2} stockées dans les condensateurs à l'équilibre.

(d) En déduire l'énergie dissipée dans le résistor.

(e) Écrire l'équation différentielle décrivant l'évolution de $q_1(t)$ avec le temps.

(f) Déterminer $q_1(t)$, $q_2(t)$ et $i(t)$. Tracer l'allure des courbes obtenues.

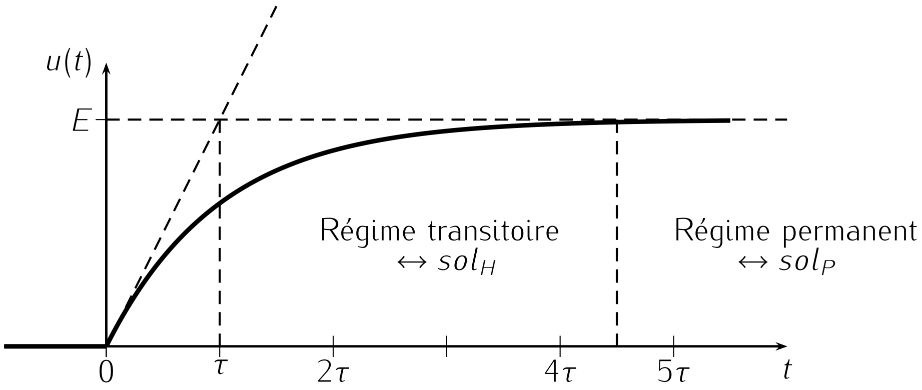
(g) À partir de l'expression de $i(t)$, retrouver le résultat de la question (d).

2. $u(t = 0^-) = 0$ d'après la question précédente. Par continuité de la tension aux bornes du
Q2 condensateur $\boxed{u(t = 0^+) = u(t = 0^-) = 0}$.

3. D'après la loi des mailles : $E = R_0 i + u$ et $i = C\frac{du}{dt}$. On obtient $\boxed{\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = \frac{E}{R_0 C}}$, où on peut
Q3 identifier un temps caractéristique $\boxed{\tau = R_0 C}$.

Q4 4. cf cours sur le circuit RC : $\boxed{u(t) = E\left(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right)}$

Q5

5. 

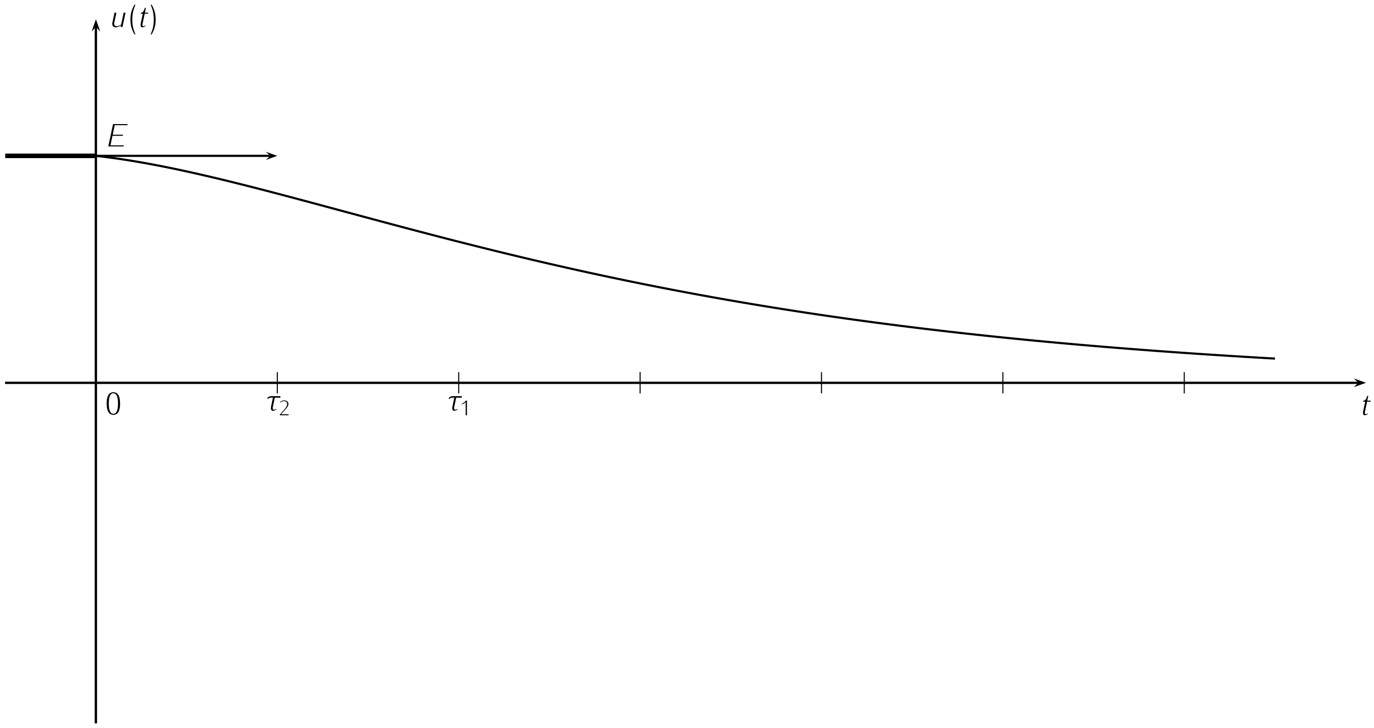
6. A $t = 0^-$, le condensateur est chargé et $u(0^-) = E$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $\boxed{u(0^-) = u(0^+) = E}$.

Soit i le courant dans la maille RLC. $i(0^-) = 0$ car le circuit était ouvert. Par continuité de
Q6 l'intensité dans la bobine, $i(0^-) = i(0^+) = 0$. Or on a aussi $i = C\frac{du}{dt}$ d'où $\boxed{\frac{du}{dt} = 0}$ à $t = 0^+$.

7. On retrouve un circuit RLC en régime libre. On obtient (cf cours) : $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u(t) = 0}$. Par
Q7 identification avec $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0$, on a $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$.

8. On suppose qu'on est en régime pseudo-périodique.
Q8 (a) Condition d'établissement d'un régime pseudo-périodique : $\Delta > 0$ ce qui donne $\boxed{Q < \frac{1}{2}}$.
(b) La solution générale de l'équation s'écrit sous la forme : $\boxed{u(t) = \lambda \exp(-\frac{t}{\tau_1}) + \mu \exp(-\frac{t}{\tau_2})}$ avec
Q9 λ et μ deux constantes d'intégration...
Q10 (c) ...et $-\frac{1}{\tau_1} = -\frac{\omega}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}$; $-\frac{1}{\tau_2} = -\frac{\omega}{2Q} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega^2}{Q^2} - 4\omega_0^2}$
(d) Les constantes d'intégrations se trouvent à l'aide des conditions initiales,
On a montré que $u(t=0) = E \Rightarrow \lambda + \mu = E$. De plus $\dot{u}(t=0) = 0$: il faut donc calculer la dérivée.
$\dot{u} = -\frac{\lambda}{\tau_1}\exp(-\frac{t}{\tau_1}) - \frac{\mu}{\tau_2}\exp(-\frac{t}{\tau_2})$ En utilisant la condition à $t = 0$ on en déduit
$\frac{\lambda}{\tau-1} + \frac{\mu}{\tau_2} = 0$
Q11 on trouve $\boxed{\lambda = \frac{E}{1-\frac{\tau_2}{\tau_1}}}$ et $\boxed{\mu = \frac{E}{1-\frac{\tau_1}{\tau_2}}}$

Q12 9. L'allure de u dans ce cas est la suivante :



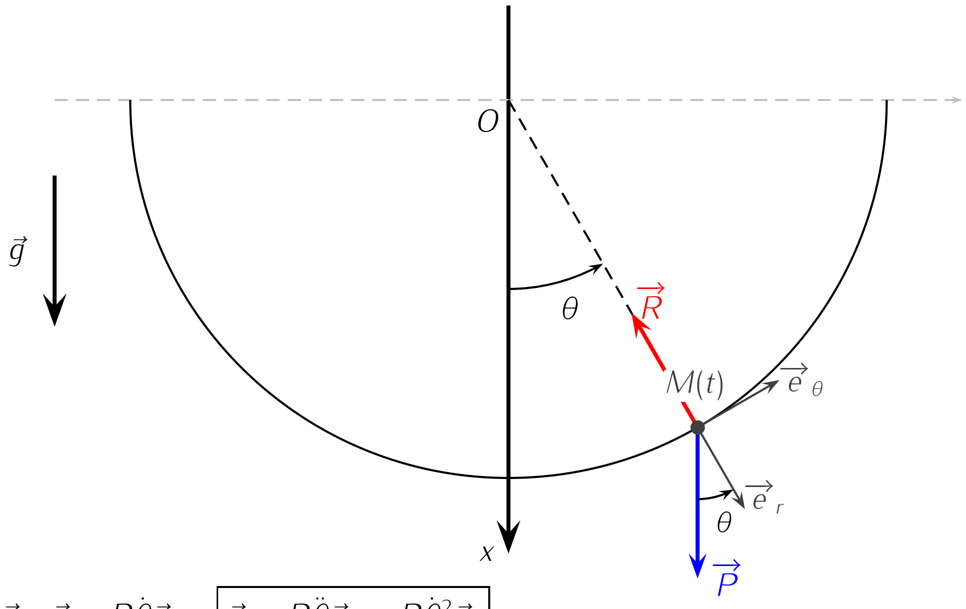
10. Le condensateur est initialement chargé puis il se décharge complètement dans le circuit. D'où
Q13 $\boxed{E_{C,I} = \frac{1}{2}CE^2}$ et $\boxed{E_{C,F} = 0}$

Q14 11. Le courant est nul au début et à la fin. D'où $\boxed{E_{L,I} = \frac{1}{2}Li^2 = 0}$ et $\boxed{E_{L,F} = 0}$.

12. On part de la loi des mailles : $Ri + L\frac{di}{dt} + u = 0$, que l'on multiplie par $i = C\frac{du}{dt}$:
Q15 $Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + Cu\frac{du}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu^2) = -Ri^2$. L'énergie électromagnétique emmagasinée diminue au cours du temps, elle est entièrement dissipée dans la résistance. L'énergie dissipée dans la résistance est donc égale à l'energie électromagnétique initiale soit $\boxed{E_R = \frac{1}{2}CE^2}$.

Mouvement pendulaire amorti

Q16 1. Système : point M. Référentiel : $\mathcal{R}_T$ terrestre supposé galiléen.
Forces : son poids $\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos(\theta)\vec{e}_r - mg\sin(\theta)\vec{e}_\theta}$; la réaction normale du support (car pas de frottements) $\boxed{\vec{R} = N\vec{e}_r}$.



Q17 2. $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$; $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $\boxed{\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r}$

3. Appliquons la deuxième loi de Newton à l'objet dans $\mathcal{R}_T$: $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$.

Q18 Soit en projection selon $\vec{e}_\theta$: $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + 0$ d'où $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{g}{R}\sin\theta = 0}$. (Remarque, une méthode énergétique fonctionne aussi).

4. Pour des angles faibles (cad $\theta(t) \ll 1$), on fait l'approximation : $\sin\theta \simeq \theta$ d'où $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$.
Le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$, la solution est de la forme $\theta(t) = A\cos(\sqrt{\frac{g}{R}}t) + B\sin(\sqrt{\frac{g}{R}}t)$.

Q19 Or $\theta(t=0) = 0 = A$ et $\dot{\theta}(t=0) = \frac{v_0}{R} = B\sqrt{\frac{g}{R}}$ d'où $B = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}$. D'où $\boxed{\theta(t) = \dfrac{v_0}{\sqrt{gR}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{g}{R}}t\right)}$

Q20 5. On ajoute la force de frottements $\vec{f} = -\lambda R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ dans le bilan des forces. Appliquons la deuxième loi de Newton à l'objet dans le référentiel d'étude : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$, soit en projection selon $\vec{e}_\theta$: $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \alpha R\dot{\theta}$, d'où pour $\theta \ll 1, \sin\theta \simeq \theta$: $ml\ddot{\theta} + mg\theta + \alpha R\dot{\theta} = 0$. Soit : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \dfrac{g}{R}\theta = 0}$

Q21 6. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est : $r^2 + \frac{\lambda}{m}r + \frac{g}{R} = 0$. Le régime est pseudo-périodique si le discriminant est négatif : $\Delta = \frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{g}{R} < 0$. D'où $\boxed{\lambda < 2m\sqrt{\frac{g}{R}}}$

7. Les racines de l'équation caractéristique sont de la forme : $r\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{m} \pm j\sqrt{4\frac{g}{R} - \frac{\lambda^2}{m^2}}\right)$

La solution est de la forme : $\theta(t) = A\exp(-\frac{t}{\tau})\sin(\Omega t + \varphi)$ avec $\boxed{\tau = 2m/\lambda}$ et $\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \frac{\lambda^2}{4m^2}}}$.

Q22 Comme $\theta(0) = 0$, on peut choisir $\varphi = 0$. $\dot{\theta}(0) = A\Omega = \frac{v_0}{R}$ donc $\boxed{A = \frac{v_0}{R\Omega}}$.

Q23 (a) $\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{A\exp(-\frac{t}{\tau})\sin(\Omega t)}{A\exp(-\frac{t+T}{\tau})\sin(\Omega(t+T))}\right) = \frac{T}{\tau}$ car $\Omega T = 2\pi$ d'où $\boxed{\lambda = \frac{2m\delta}{T}}$

Q24 (b) Sur la courbe, on lit $2T = 0{,}80\,\text{s}$ soit $\boxed{T = 0{,}4\,\text{s}}$

(c) Par lecture graphique en prenant les deux premiers maxima, on lit $\delta = \ln(0{,}20/0{,}10)$ $\boxed{\delta = \ln 2 = 0{,}69}$

Q25 .

Q26 (d) D'où $\lambda = \frac{2m\delta}{T} = \frac{2\times 0{,}100\times\ln 2}{0{,}40}$ $\boxed{\lambda = 3{,}5.10^{-1}\ \text{kg.s}^{-1}}$

Distance de freinage

1. (a) La voiture est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la réaction du sol $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = T\vec{e}_x + \vec{e}_y$, avec $|T| \leq f|N|$, où f est le coefficient de frottement pneu/route.

   (b) La seconde loi de Newton appliquée à la voiture dans le référentiel terrestre galiléen donne $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{N} + \vec{P}$. La projection selon l'axe vertical donne $N = mg$, la projection selon l'axe horizontal donne : $m\ddot{x} = T$. À la limite du glissement on a $T = -fN$ et donc $\ddot{x} = -fg$, qui s'intègre en $\dot{x} = -fgt + v_0$ où v_0 est la vitesse de la voiture juste avant le freinage pris comme origine des temps. Une seconde intégration aboutit à $x = -\frac{1}{2}fgt^2 + v_0 t$ en choisissant l'origine O comme position du véhicule à t = 0.

   Le véhicule s'arrête donc à la date $t = \frac{v_0}{fg}$ et a parcouru la distance totale $d = \frac{v_0^2}{2fg}$.

   (c) On peut donc en déduire la valeur du coefficient de frottement à partir des données du premier encart du document et de la formule $f = \frac{v_0^2}{2gd}$. Pour $V_0 = 80$ km/h, on obtient $f = 0{,}44$. Pour $V_0 = 90$ km/h, on obtient f = 0,45. Les deux valeurs semblent cohérentes. L'incompatibilité doit venir du second encart.

   (d) Le véhicule percute l'obstacle à l'abscisse x_{choc} à la date t choc vérifiant l'équation : $x_{choc} = -\frac{1}{2}fgt^2 + v_0 t$, soit $t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2fgx_{choc}}}{fg} = 3{,}2$ s. On en déduit la vitesse du choc : $\dot{x} = 40$ km/h, bien en dessous des 48 km/h annoncés.

2. On reprend la modélisation en prenant en compte une phase à la vitesse constante v_0 pendant une durée $t_R = 1$ s avant le début du freinage. La distance totale d'arrêt vaut donc $d = v_0 t_R + \frac{v_0^2}{2fg}$. La valeur du coefficient de frottement s'en déduit par cette nouvelle formule. Pour $v_0 = 80$ km/h, on obtient f = 0,72. Pour $v_0 = 90$ km/h, on obtient f = 0,71. Les deux valeurs sont à nouveau cohérentes entre elles. En prenant en compte le temps de réaction, le véhicule percute l'obstacle à l'abscisse x_{choc} à la date t vérifiant l'équation $x_{choc} = -\frac{1}{2}fgt^2 + v_0(t + t_R)$. Tout calcul fait, la vitesse lors de l'impact vaut $\sqrt{v_0^2 - 2fg(t - t_R)}$. Numériquement on trouve 48 km/h avec f = 0,71, ce qui correspond bien à la valeur affichée sur le document.