Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

Réduction

À quelle condition nécessaire et suffisante une matrice (respectivement un endormorphisme) est-elle (respectivement est-il) trigonalisable ?

Réduction

Concernant ce chapitre, que peut-on dire des matrices triangulaires ? des matrices symétriques ?

Réduction

Le polynôme caractéristique d'une matrice A (respectivement d'un endomorphisme u) est annulateur de A (respectivement de u) c'est-à-dire :

$$\chi_A(A) = 0_n \quad \text{(respectivement } \chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\text{)}.$$

Une matrice (respectivement un endomorphisme) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

$\star$ On calcule facilement le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire $T = (t_{i,j})$:

$$\chi_T = \prod_{k=1}^{n} (X - t_{i,i}).$$

Par conséquent, les valeurs propres de T sont ses cœfficients diagonaux, elles apparaissent autant de fois que leur multiplicité.

$\star$ Une matrice symétrique à cœfficients réels est toujours diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Attention, ce n'est plus vrai pour les matrices symétriques à cœfficients complexes.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont fausses, les corriger.

⋆ *Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.*

⋆ *Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*

Réduction

Montrer que A et A^{T} ont les mêmes valeurs propres.

Réduction

Que peut-on dire sur le nombre de valeurs propres d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? sur les valeurs propres d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Réduction

Ces deux assertions sont fausses !

Voici des énoncés correctes :

- Si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples alors la matrice est diagonalisable.
- Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité.
- Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_{A^\mathsf{T}}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A^\mathsf{T}) = \det((\lambda I_n - A)^\mathsf{T}) = \det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda).$$

Comme A et A^T ont le même polynôme caractéristique, elles ont les mêmes valeurs propres, avec les mêmes multiplicités.

$\star$ Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, la matrice A possède n valeurs propres complexes, comptées avec leurs multiplicités (et donc en particulier, au moins une).

$\star$ La matrice A possède au plus n valeurs propres réelles, comptées avec leurs multiplicités. Ses valeurs propres complexes non réelles sont conjuguées deux à deux et ont même multiplicité.

Quel est le résultat permettant de relier la trace, le déterminant et les valeurs propres d'une matrice ?

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'on a déjà trouvé $n-1$ valeurs propres réelles de A (comptées avec leurs multiplicités). Comment peut-on conclure sur les valeurs propres de A ?

Quelle est la définition d'un endomorphisme diagonalisable ? d'une matrice diagonalisable ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Donner la définition du sous-espace propre associé à une valeur propre λ. Que sait-on sur sa dimension ?

Que sait-on sur les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ? Dans quel cas sont-ils supplémentaires ?

Que sait-on sur les sous-espaces propres de deux endomorphismes qui commutent ?

⋆ Sous l'hypothèse que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ (à ne pas oublier !) :

— la trace est la somme des valeurs propres, répétées autant de fois que leurs multiplicités,

— le déterminant est le produit des valeurs propres, répétées autant de fois que leurs multiplicités.

⋆ Le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ (c'est toujours le cas !) donc la dernière valeur propre complexe est obtenue en faisant la différence entre la trace de A et la somme des $n-1$ valeurs propres déjà obtenues. Comme c'est un réel, il s'agit en fait de la dernière valeur propre réelle.

⋆ Un endomorphisme de E est dit *diagonalisable* lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

⋆ Une matrice est dite *diagonalisable* lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

⋆ On a $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = \lambda X\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$.
Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(E_\lambda(A)) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})) - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n).$$

On a aussi $1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant m_\lambda$.
Cas particulier : Si $m_\lambda = 1$ alors $\dim(E_\lambda(A)) = 1$.

⋆ Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Par conséquent, la somme de leurs dimensions est inférieure ou égale à n.
Ils sont supplémentaires si et seulement si la matrice A est diagonalisable.

⋆ Tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Donner autant d'assertions que possibles équivalentes à l'assertion λ est une valeur propre de A.

Application : On suppose que $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ vérifie $\mathrm{rg}(A) = 1$. Que peut-on en déduire sur les éléments propres de A ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose la diagonalisabilité de A prouvée, comment peut-on diagonaliser la matrice A ?

Réduction

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On suppose que l'on dispose d'un polynôme P annulateur de A.

Quel résultat de cours peut-on utiliser pour déterminer les éléments propres de A ? pour prouver la diagonalisabilité de A ?

Peut-on utiliser P pour déterminer les multiplicités des valeurs propres de A ?

Réduction

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. λ est une valeur propre de A
ii. L'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet des solutions non nulles
iii. $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$
iv. $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \neq n$
v. $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible
vi. $\chi_A(\lambda) = 0$

Application : On a $\mathrm{rg}(A - 0I_n) \neq 4$ donc 0 est une valeur propre de A.
N.B. : Par le théorème du rang, on a de plus $\dim(E_0(A)) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 3$ et donc $m_0 \geqslant 3$.

$\star$ On détermine toutes les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre associé. On concatène les bases obtenues : on obtient ainsi une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (car les sous-espaces propres sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puisque A est diagonalisable).
$\star$ On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A c'est-à-dire $\varphi_A : X \mapsto AX$.
Par les relations de changement de base, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi_A) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A) P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$ en notant $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ et $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$.
P est la matrice qui contient en colonne les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, elle est bien inversible en tant que matrice de passage, d'inverse $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.
D est diagonale (car $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de φ_A), elle contient sur sa diagonale les valeurs propres de A répétées selon leurs multiplicités (l'ordre est défini par $\mathcal{B}$).

$\star$ On sait que les valeurs propres de A sont DES racines de P. En d'autres termes, en notant $\mathcal{R}_P$ l'ensemble des racines de P, on a :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{R}_P.$$

Attention, il n'y a pas égalité en général.

$\star$ On sait qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Ainsi, si P est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples alors on pourra conclure que A est diagonalisable.

$\star$ Les mulplicités des valeurs propres de A sont définies comme les multiplicités des racines du polynôme caractéristique χ_A. On ne peut rien déduire des multiplicités des racines d'un polynôme annulateur quelconque de A.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Quelle est la définition du polynôme caractéristique χ_A ? Quel est son degré ? Que savez sur ses cœfficients ? ses racines ? Précisez son expression dans le cas où $n = 2$.

Réduction

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Que signifie :

1. λ *est une valeur propre de* A ?
2. X *est un vecteur propre de* A ?
3. X *est un vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* λ ?
4. X *appartient au sous-espace propre* $E_\lambda(A)$?

Réduction

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$.
Donner tous les critères de diagonalisabilité que vous connaissez.

Réduction

χ_A est le polynôme défini par :

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A).$$

Il est unitaire et de degré n. Son cœfficient devant X^{n-1} est $-\mathrm{tr}(A)$ et son cœfficient constant est $(-1)^n \det(A)$.
Ainsi, dans le cas particulier $n = 2$, on a $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$.

Ses racines sont exactement les valeurs propres de A et les multiplicités de ses racines sont par définition les multiplicités des valeurs propres de A.

1. Cela signifie que λ est un élément de $\mathbb{K}$ qui vérifie :

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0_{n,1},\ \text{tel que } AX = \lambda X.$$

2. Cela signifie que X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui vérifie :

$$X \neq 0_{n,1} \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } AX = \lambda X.$$

3. Cela signifie que X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui vérifie :

$$X \neq 0_{n,1} \text{ et } AX = \lambda X.$$

4. Cela signifie que X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui vérifie :

$$AX = \lambda X.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. u est diagonalisable.
ii. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
iii. $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$
iv. $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda) = n$
v. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.
vi. $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u.
vii. u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme.
Montrer que si x est un vecteur propre de l'endomorphisme u alors x est un vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$.

Réduction

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
Que peut-on dire sur les liens entre u et A concernant les éléments propres ? le polynôme caractéristique ? la diagonalisabilité ? la triagonalisabilité ?

Réduction

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Donner autant d'assertions que possibles équivalentes à l'assertion λ est une valeur propre de u.

Application : On suppose que u est un endomorphisme de E avec E de dimension finie et que l'on connaît $Sp(u)$. Comment peut-on savoir si u est un automorphisme de E ?

Réduction

On suppose que x est un vecteur propre de u.
Alors $x \neq 0_E$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
On sait alors que $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Comme $x \neq 0_E$, on en déduit que x est un vecteur propre de $P(u)$, associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

⋆ L'endomorphisme u et la matrice A ont les mêmes valeurs propres et leurs sous-espaces propres sont reliés par les relations vectoriel/matriciel dans la base $\mathcal{B}$.

⋆ L'endomorphisme u et la matrice A ont le même polynôme caractéristique (donc les valeurs propres ont les mêmes multiplicités).

⋆ L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si la matrice A est diagonalisable.

⋆ L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si la matrice A est trigonalisable.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i. λ est une valeur propre de u
ii. L'équation $u(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in E$ admet des solutions non nulles
iii. $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$
iv. $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective
v. $\mathrm{rg}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq n$
vi. $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas surjective
vii. $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijective (c'est-à-dire n'est pas un automorphisme)
viii. $\chi_u(\lambda) = 0$

Les assertions v., vi., vii. et viii. ne sont valables qu'avec un espace vectoriel E de dimension finie, où $n = \dim(E)$.
Application : u est un automorphisme de E si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de u c'est-à-dire si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.

Soit u un endomophisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Quelles sont les droites vectorielles stables par u ?

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Que signifie :

1. *λ est une valeur propre de u ?*
2. *x est un vecteur propre de u ?*
3. *x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ ?*
4. *x appartient au sous-espace propre $E_\lambda(u)$?*

Soit $A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline (0) & D \end{array}\right)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
On suppose que A est diagonalisable. Prouver que B est diagonalisable.

Ce sont les droites engendrées par un vecteur propre de u c'est-à-dire les sous-espaces vectoriels du type $\text{Vect}(x)$ où x est un vecteur propre de u.

1. Cela signifie que λ est un élément de $\mathbb{K}$ qui vérifie :

$$\exists x \in E,\ x \neq 0_E,\ \text{ tel que } u(x) = \lambda x.$$

2. Cela signifie que x est un élément de E qui vérifie :

$$x \neq 0_E \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } u(x) = \lambda x.$$

3. Cela signifie que x est un élément de E qui vérifie :

$$x \neq 0_E \text{ et } u(x) = \lambda x.$$

4. Cela signifie que x est un élément de E qui vérifie :

$$u(x) = \lambda x.$$

On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A et $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Comme la matrice A est triangulaire par blocs, on sait que $F \overset{def}{=} \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est stable par φ. On peut donc considérer l'endomorphisme φ_F induit par φ sur F et B est sa matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$.

Comme A est diagonalisable, φ l'est aussi. En tant qu'endomorphisme induit, φ_F est donc aussi diagonalisable et donc B est diagonalisable.