⋆ *Citer la règle de d'Alembert pour les séries entières.*

⋆ *Citer la règle de d'Alembert pour les séries numériques (qui pourra être utile pour déterminer le rayon de convergence d'une série lacunaire, comme $\sum a_n z^{2n}$ par exemple).*

⋆ *Donner la définition du produit de Cauchy de deux séries entières.*

⋆ *Que peut-on dire de son rayon de convergence et de sa somme ?*

Énoncer la formule Taylor avec reste intégral puis l'inégalité de Taylor-Lagrange.

⋆ *Règle de d'Alembert pour les séries entières*

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ à partir d'un certain rang, $a_n \neq 0$ $\boxed{2}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ (finie ou infinie).

Alors $R\left(\sum a_n z^n\right) = \dfrac{1}{\ell}$ en posant par convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

⋆ *Règle de d'Alembert pour les séries numériques*

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ à partir d'un certain rang, $u_n > 0$ $\boxed{2}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ (finie ou infinie).

Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge et si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple d'utilisation pour les séries entières : Pour déterminer $R\left(\sum a_n z^{2n}\right)$, on fixe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose $u_n = |a_n| r^{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On utilise la règle de d'Alembert pour les séries numériques pour étudier la convergence de la série $\sum u_n$. Cela permet de déterminer $\sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ \sum a_n r^{2n}$ converge absolument$\}$.

⋆ On appelle *produit de Cauchy des séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{\substack{(p,q)\in[[0,n]]^2 \\ p+q=n}} a_p b_q$.

⋆ Le rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières vérifie :

$$R\left(\sum c_n z^n\right) \geqslant \min\left(R\left(\sum a_n z^n\right), R\left(\sum b_n z^n\right)\right).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\left(R\left(\sum a_n z^n\right), R\left(\sum b_n z^n\right)\right)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

⋆ *Formule de Taylor avec reste intégral*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I.

Pour tout $(a,b) \in I^2$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

⋆ *Inégalité de Taylor-Lagrange*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I et $f^{(n+1)}$ est bornée sur I. Alors pour tout $(a,b) \in I^2$, on a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \operatorname*{Sup}_{t\in I} |f^{(n+1)}(t)| \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Donner la définition du rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$.

De quels ensembles le rayon de convergence R est-il la borne supérieure ?

Donner les développements en série entière usuels, avec leur domaine de validité.

On souhaite déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$.

Étape 1 : simplification du problème

Quels résultats peut-on utiliser pour se ramener à l'étude du rayon de convergence d'une série entière plus simple ?

⋆ Par définition, le rayon de convergence est l'élément de $[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$ défini par :

$$R=\sup\{r\in\mathbb{R}_+ \text{ tel que la suite } (a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

⋆ On a également :

$$R=\sup\{r\in\mathbb{R}_+ \text{ tel que la suite } (a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\},$$

$$R=\sup\{r\in\mathbb{R}_+ \text{ tel que la série } \sum a_nr^n \text{ converge}\},$$

$$R=\sup\{r\in\mathbb{R}_+ \text{ tel que la série } \sum a_nr^n \text{ converge absolument}\}.$$

$\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$	$\forall z\in\mathbb{C}$ tel que $\lvert z\rvert<1,\ \dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^n$
$\forall x\in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$(*Connaître les cas* $\alpha=\dfrac{1}{2}$ et $\alpha=-\dfrac{1}{2}$)	
$\forall x\in]-1,1[,\ \ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$	$\forall x\in]-1,1[,\ \arctan(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$
$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}x^n$	$\forall z\in\mathbb{C},\ e^z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}z^n$
$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}$	$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$	$\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

Étape 1 : simplification du problème

Le rayon de convergence est inchangé lorsqu'on :

— élimine les constantes multiplicatives non nulles,
— prend un équivalent du coefficient a_n,
— multiplie ou divise par n un nombre fixé de fois,
— dérive terme à terme ou primitive terme à terme.

On souhaite déterminer le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$.

Étape 2 : après simplification du problème

$\star$ *Cas particulier : Que vaut* $R\left(\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha z^n\right)$ *pour* $\alpha \in \mathbb{R}$ *?*

$\star$ *Donner deux méthodes pour déterminer R dans le cas général.*

$\star$ *Comment peut-on exploiter la connaissance d'inégalités sur a_n ?*

Que sait-on sur la régularité (continuité, dérivabilité, classe $\mathcal{C}^k$...) d'une somme de série entière ? Comment obtient-on ses dérivées successives ?

Que sait-on sur l'intégration d'une somme de série entière ?

Soit $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$.

Que peut-on dire de sa convergence en tant que série de fonctions de la variable réelle ?

Que sait-on sur l'ensemble de définition de sa somme ?

$\star$ On sait que $R\left(\sum_{n\geq 1} n^{\alpha} z^n\right) = 1$.

$\star$ *Méthode 1 :* On peut utiliser la règle de d'Alembert pour les séries entières non lacunaires (pour les séries lacunaires, on peut revenir à l'étude de la nature de la série numérique pour $r \in \mathbb{R}_+$ fixé, éventuellement en utilisant le théorème de d'Alembert pour les séries numériques).

$\star$ *Méthode 2 :* On peut revenir à la définition du rayon de convergence, ou à une de ses caractérisations, en tant que borne supérieure d'un ensemble que l'on cherche à déterminer.

$\star$ Les inégalités à partir d'un certain rang permettent d'obtenir des relations de domination. Si $a_n = O(b_n)$ alors $R\left(\sum a_n z^n\right) \geqslant R\left(\sum b_n z^n\right)$.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note S sa somme.

$\star$ La fonction S est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]-R, R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent sur $]-R, R[$ par dérivation terme à terme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[,$$
$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)...(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

$\star$ On peut intégrer la somme terme à terme sur tout segment inclus dans $]-R, R[$:

$$\forall (\alpha, \beta) \in]-R, R[^2, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} a_n t^n \mathrm{d}t\right).$$

Cas particulier : Avec $\alpha = 0$ et $\beta = x \in]-R, R[$, on obtient ainsi l'expression de l'unique primitive de S sur $]-R, R[$ qui s'annule en 0.

$\star$ La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge simplement sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
En notant $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de sa somme, on a :

$$]-R, R[\subset \mathcal{D} \subset [-R, R].$$

Pour déterminer complètement $\mathcal{D}$, il faudrait étudier la convergence des séries numériques $\sum a_n R^n$ et $\sum a_n (-R)^n$.

$\star$ La série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge normalement (et donc uniformément) sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.
Attention, il n'y a pas convergence normale sur $]-R, R[$ en général !

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Soit $z \in \mathbb{C}$. Que peut-on dire du module de z dans chacun des cas suivants ?

1. *On sait que la série $\sum a_n z^n$ converge.*
2. *On sait que la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.*
3. *On sait que la série $\sum a_n z^n$ converge mais ne converge pas absolument.*
4. *On sait que la suite $(a_n z^n)$ diverge mais elle est bornée.*
5. *On sait que la suite $(a_n z^n)$ converge vers un complexe non nul.*

Séries entières

Soit S la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$. On suppose que l'on connaît la fonction S explicitement sur un intervalle du type $]-r, r[$ avec $r > 0$.

Comment peut-on déterminer les cœfficients a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$? (Proposer deux méthodes.)

Séries entières

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note S sa somme.

Exprimer $(2-x)S'(x) - S(x)$ comme une somme de série entière pour $x \in]-R, R[$.

Séries entières

1. On a $|z| \leqslant R$ (car si $|z| > R$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge).

2. On a $|z| \geqslant R$ (car si $|z| < R$ alors la série converge).

3. Comme $\sum a_n z^n$ converge, on a $|z| \leqslant R$ et comme $\sum a_n z^n$ ne converge pas absolument, on a $|z| \geqslant R$ d'où $|z| = R$.

4. Comme $(a_n z^n)$ diverge, on a $|z| \geqslant R$ et comme $(a_n z^n)$ est bornée, on a $|z| \leqslant R$ d'où $|z| = R$.

5. Comme $(a_n z^n)$ converge, on a $|z| \leqslant R$ et comme $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0, on a $|z| \geqslant R$ d'où $|z| = R$.

⋆ On sait que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

⋆ On peut développer la fonction obtenue en série entière et identifier les cœfficients par unicité.

En tant que somme de série entière, S est dérivable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence. On a donc pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned}(2-x)S'(x) - S(x) &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\end{aligned}$$

par glissement d'indice dans la première somme, puis en ajoutant un terme nul à la deuxième somme :

$$\begin{aligned}(2-x)S'(x) - S(x) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(2a_{n+1} - a_n) x^n.\end{aligned}$$

Que sait-on sur les fonctions développables en série entière ?

Séries géométriques dérivées :
Rappeler leur rayon de convergence et leur somme.

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ avec $r>0$ alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et on a :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

⋆ Comme le rayon de convergence est invariant par dérivation terme à terme, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$R\left(\sum x^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}\right) = \ldots = R\left(\sum_{n\geqslant p} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}\right)$$
$$= 1$$

⋆ Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}\ ,\ldots,\ \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$