Espaces probabilisés infinis Compléments

II Espaces probabilisés $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$

II.2 Calcul des probabilités

Propos. • Sous-additivité de la probabilité
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé,
$(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements. Alors :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} \mathrm{P}(A_i).$$

Démo. ▪ **Cas d'un nombre fini d'événements**
Montrons, par récurrences sur $n \in \mathbb{N}^*$, les propriétés :

$$\mathscr{H}(n) : \quad \text{“} \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T} : \quad \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i). \text{”}$$

∗ **Initialisation.** Pour $n = 1$, prenons $A_1 \in \mathcal{T}$. Alors :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right) = \mathrm{P}(A_1) = \sum_{i=1}^{1} \mathrm{P}(A_i)$$

donc a fortiori, $\mathscr{H}(1)$ est vraie.

∗ **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{H}(n)$ est vrai. Montrons $\mathscr{H}(n+1)$.
Prenons des événements $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1} \in \mathcal{T}$. En posant $B := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathrm{P}(B \cup A_{n+1}) \\
&= \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A_{n+1}) - \underbrace{\mathrm{P}(B \cap A_{n+1})}_{\geqslant 0} && \text{(formule de Poincaré)} \\
&\leqslant \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(A_{n+1}) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathrm{P}(A_{n+1}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) + \mathrm{P}(A_{n+1}) && \text{(grâce à } \mathscr{H}(n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{P}(A_i).
\end{aligned}$$

L'hypothèse $\mathscr{H}(n+1)$ est démontrée.

La sous-additivité de la probabilité est démontrée pour les familles finies d'événements.

▪ **Extension aux familles dénombrables**
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille infinie dénombrable d'événements. La probabilité de leur réunion dénombrable est donnée par :

$$(*) \quad \mathrm{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Or, d'après la première partie de cette preuve :

$$\forall n \geqslant 1 : \quad \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i).$$

Cette dernière somme est une somme partielle de la série de termes positifs $\sum_{i\geqslant 1} \mathrm{P}(A_i)$. Dans $[0, \infty]$, elle converge vers la somme de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i) \in [0, \infty]$.
En passant à la limite dans les inégalités larges de $(*)$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} \mathrm{P}(A_i).$$

La sous-additivité est démontrée dans le cas des famille infinies dénombrables d'événements.