Conditionnement, indépendance Lois de variables aléatoires discrètes Compléments

III Loi d'une variable aléatoire discrète

III.1 Loi d'une variable aléatoire discrète

Thm • Variables aléatoires discrètes ayant même loi

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes, à valeurs dans un même ensemble E. Sont équivalentes :

1) Les variables X et Y définissent la même loi, c.à.d. $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_Y$;

2) Il existe un ensemble au plus dénombrable $V \subset E$ tel que :

$$\begin{cases} X(\Omega) \subset V, \quad Y(\Omega) \subset V \\ \forall k \in V : \quad \mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(Y=k) \end{cases}$$

3) Pour toute partie $A \subset E$:

$$\mathrm{P}(X \in A) = \mathrm{P}(Y \in A).$$

Quand c'est le cas, on dira que **X et Y ont même loi (de probabilité)**, et on écrira : $\boldsymbol{X \sim Y}$.

Démo. Introduisons Ω_X (resp. Ω_Y) l'ensemble des valeurs prises par X (resp. par Y) avec probabilité non nulle :

$$\Omega_X := \{k \in E \,/\, \mathrm{P}(X=k) \neq 0\} \quad \text{et} \quad \Omega_Y := \{k \in E \,/\, \mathrm{P}(Y=k) \neq 0\}.$$

Remarquons que $\Omega_X \subset X(\Omega)$: par contraposition, si $k \notin X(\Omega)$, alors $[X=k] = \varnothing$, donc $\mathrm{P}(X=k) = 0$, d'où $k \notin \Omega_X$.
Comme X est une variable *discrète,* $X(\Omega)$ est un ensemble au plus dénombrable.
Ω_X, qui en est une partie, est lui aussi un ensemble au plus dénombrable. Bien sûr, il en va de même pour $Y(\Omega)$.

- **[1 ⇒ 2]** Supposons que $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_Y$.
  Cela signifie que $\Omega_X = \Omega_Y$ et que $\mathrm{P}(X \in A) = \mathrm{P}(Y \in A)$ pour toute partie A de Ω_X.
  Prenons $V := X(\Omega) \cup Y(\Omega)$. Cet ensemble contient $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Puisque X et Y sont discrètes, il est au plus dénombrable (en tant que réunion de 2 ensembles au plus dénombrables).
  En outre, pour $k \in V$ quelconque :
  * **Si $k \in \Omega_X$,** alors $\{k\}$ est une partie de Ω_X, et :
  $$\mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}\big(X \in \{k\}\big) \overset{\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_Y}{=} \mathrm{P}\big(Y \in \{k\}\big) = \mathrm{P}(Y=k).$$
  * **Si $k \notin \Omega_X = \Omega_Y$,** alors $\mathrm{P}(X=k) = 0 = \mathrm{P}(Y=k)$.

  On a prouvé : $\forall k \in V : \ \mathrm{P}(X=k) = \mathrm{P}(Y=k)$.

- **[2 ⇒ 3]** Prenons une partie V comme dans le point 2, et A une partie de E. Remarquons pour commencer que $[X \in A] = [X \in A \cap V]$:
  * $[X \in A \cap V] \subset [X \in A]$ est immédiat ;
  * Supposons que $\omega \in [X \in A]$; alors $X(\omega) \in A$; mais $X(\omega) \in X(\Omega)$ et comme $X(\Omega) \subset V$, $X(\omega) \in V$ également, et ainsi $X(\omega) \in A \cap V$: on a prouvé que $[X \in A] \subset [X \in A \cap V]$.

  Évidemment, on a de même $[Y \in A] = [Y \in A \cap V]$.
  Puisque V est au plus dénombrable, $A \cap V$ l'est aussi. La σ-additivité permet d'obtenir l'égalité souhaitée :
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \in A) = \mathrm{P}(X \in A \cap V) &= \mathrm{P}\Big(\biguplus_{k \in A \cap V} [X=k]\Big) = \sum_{k \in A \cap V} \mathrm{P}(X=k) \\ &= \sum_{k \in A \cap V} \mathrm{P}(Y=k) = \mathrm{P}\Big(\biguplus_{k \in A \cap V} [Y=k]\Big) = \mathrm{P}(Y \in A \cap V) = \mathrm{P}(Y \in A). \end{aligned}$$

- **[3 ⇒ 1]** Supposons que, pour toute partie $A \in E$, $\mathrm{P}(X \in A) = \mathrm{P}(Y \in A)$. Montrons que $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_Y$:
  * Montrons que $\Omega_X = \Omega_Y$. Pour $k \in E$ quelconque :
  $$\begin{aligned} k \in \Omega_X &\iff \mathrm{P}(X=k) \neq 0 \iff \mathrm{P}\big(X \in \{k\}\big) \neq 0 \\ &\iff \mathrm{P}\big(Y \in \{k\}\big) \neq 0 \iff \mathrm{P}(Y=k) \neq 0 \iff k \in \Omega_Y. \end{aligned}$$
  * Pour toute partie A de Ω_X, puisque A est a fortiori une partie de E : $\mathrm{P}(X \in A) = \mathrm{P}(Y \in B)$.

Méth. • Description d'une loi par une fonction de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans E.
Pour décrire la loi de X, il suffit de donner :

1) un ensemble au plus dénombrable V tel que $X(\Omega) \subset V$;

2) la valeur des probabilités $p_k = \mathrm{P}(X=k)$ pour tout $k \in V$.

En effet, on a dans ce cas :

$$\forall A \subset E : \quad \mathrm{P}(X \in A) = \sum_{k \in A \cap V} p_k.$$

Démo. Comme dans la preuve précédente : $[X \in A] = [X \in A \cap V] = \biguplus_{k \in A \cap V} [X=k]$

donc par σ-addictivité : $\mathrm{P}(X \in A) = \sum_{k \in A \cap V} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k \in A \cap V} p_k$.

Propr. • Conservation de la loi par application d'une fonction

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans E,
V un ensemble contenant $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, contenu dans E,
$f : V \to F$ une application. Alors :

1) $f(X)$ et $f(Y)$ sont des variables aléatoires discrètes ;

2) $X \sim Y \implies f(X) \sim f(Y)$.

Démo. **1)** Montrons que l'application $f(X)\colon\ \omega \in \Omega \mapsto f\big(X(\omega)\big) \in F$ est une variable aléatoire discrète.

* Cette application est bien définie : pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in X(\Omega) \subset V$ donc $f\big(X(\omega)\big)$ existe et appartient à F.
* L'ensemble $\big(f(X)\big)(\Omega)$ est la réunion des singletons $\big\{f(k)\big\}$ pour $k \in X(\Omega)$. Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable (X est une v.a.d.), c'est la réunion d'une famille au plus dénombrable d'ensembles finis : cet ensemble est au plus dénombrable.
* Rappelons que si B est une partie de F, $f^{-1}(B)$ désigne l'*image réciproque de B par f*, c'est-à-dire l'ensemble des antécédents des éléments de B par f. C'est une partie de V, donc de E.

  Prenons $\ell \in \big(f(X)\big)(\Omega)$. Alors :

$$\begin{aligned}\big[f(X)=\ell\big] &= \big\{\omega \in \Omega \ \big/\ f\big(X(\omega)\big)=\ell\big\}\\ &= \big\{\omega \in \Omega \ \big/\ X(\omega) \in f^{-1}\big(\{\ell\}\big)\big\}\\ &= \big[X \in f^{-1}\big(\{\ell\}\big)\big].\end{aligned}$$

  Puisque $f^{-1}\big(\{\ell\}\big)$ est une partie de E et que X est une v.a.d., cet ensemble est bien un événement.

2) Supposons que X et Y ont même loi, et montrons que $f(X)$ et $f(Y)$ également.
Posons $V' := \big(f(X)\big)(\Omega) \cup \big(f(Y)\big)(\Omega)$, ensemble au plus dénombrable contenant les univers-image de $f(X)$ et de $f(Y)$. Prenons $\ell \in V'$. Alors :

$$\mathrm{P}\big(f(X)=\ell\big) = \mathrm{P}\big(X \in f^{-1}(\{\ell\})\big) \underset{\substack{\uparrow\\ X\sim Y}}{=} \mathrm{P}\big(Y \in f^{-1}(\{\ell\})\big) = \mathrm{P}\big(f(Y)=\ell\big)\,;$$

cela prouve que $f(X) \sim f(Y)$.