Corrigé du DS 4

Problème

Q1. $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = f(n+1) \geqslant 0$ et d'après la relation de Chasles : $J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. Donc :

$$\boxed{\text{les suites } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont croissantes.}}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on sait que f est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $t \in [k-1\,;k], f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1)$, donc par croissance de l'intégrale (avec les bornes $k-1 \leqslant k$) :

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k-1).}$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après **Q1** et par somme d'inégalités,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$$

or, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = S_n$$

donc par décalage d'indice dans la dernière somme :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n - f(0) \leqslant J_n \leqslant S_{n-1}.}$$

Q3.
- Supposons f intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$,
  donc $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, soit M un majorant de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  donc, d'après la question **Q2**, $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leqslant f(0) + J_n \leqslant f(0) + M$, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, or elle est croissante (**Q1**), donc d'après le théorème de la limite monotone, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est à dire $\sum f(n)$ converge.
- Réciproquement, supposons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, soit M un majorant de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n - 1 \leqslant M$
  or f est positive sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}+, \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\lfloor x\rfloor+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$$

  or f est positive, donc : $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$.
  Donc :

$$\boxed{f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+ \text{ si et seulement si la série } \sum f(n) \text{ converge.}}$$

- d'après la question **Q1**, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(n) \leqslant f(n-1) - f(n)$$

  donc la série $\sum \left[\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(n)\right]$ est à termes positifs. De plus, $\forall N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} (f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N) \leqslant f(0)$$

  donc la série $\sum (f(n-1) - f(n))$ est majorée et à termes positifs, donc convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \left[\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(n)\right] \text{ converge.}}$$

Remarque : on peut commencer par démontrer le (2) et en déduire l'équivalence car d'après (2) $(S_n - J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Q4. a) la fonction f est strictement positive sur $[2\,;+\infty[$ et dérivable sur $[2\,;+\infty[$ d'après les théorèmes d'opérations sur les fonctions dérivables et $\forall x \geqslant 2$:

$$f'(t) = \frac{-\left((\ln x)^\alpha + \alpha(\ln x)^{\alpha-1}\right)}{\left(x(\ln x)^\alpha\right)^2} < 0$$

donc :

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } [2\,;+\infty[.}$$

Soit $x \in [2\,;+\infty[$, par changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $u = \ln x$,

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^x \frac{1}{(\ln x)^\alpha} \ln'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{u^\alpha}\,\mathrm{d}u.$$

Donc :

si $\alpha \neq 1$,

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(\ln x)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}}\right)$$

si $\alpha = 1$,

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2).$$

Donc, si $\alpha = 1$, $\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc f n'est pas intégrable sur $[2\,;+\infty[$.
Si $\alpha \in]0\,;1[$,

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}\left((\ln x)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

donc f n'est pas intégrable sur $[2\,;+\infty[$.
Si $\alpha > 1$,

$$\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(\ln x)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{(\alpha-1)(\ln 2)^{\alpha-1}},$$

or f est positive, donc $f \in L^1([2\,;+\infty[)$.
De plus f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[2\,;+\infty[$, donc d'après la question **Q3**,

$$\boxed{\text{la série } \sum \tfrac{1}{n(\ln n)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

b) D'après **Q2**, $\forall n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} S_n &\leqslant f(2) + J_n \\ &\leqslant f(2) + \int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

et

$$S_n \geqslant J_{n+1}$$

et les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, donc par passage à la limite des inégalités larges :

$$\boxed{\tfrac{1}{\ln 2} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \tfrac{1}{n(\ln n)^2} \leqslant \tfrac{1}{2(\ln 2)^2} + \tfrac{1}{\ln 2}.}$$

Q5. a) Soit $f : t \mapsto \frac{1}{t}$, donc f est continue, positive et décroissante sur $[1\,;+\infty[$, donc d'après la question **Q3** (on décale l'intervalle de définition de f), la série $\sum_{n\geqslant 2}\left[\left(\int_{n-1} n f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(n)\right]$ converge. Or, $\forall n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2}^{n}\left[\left(\int_{k-1} k f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(k)\right] \\ &= \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \\ &= \ln n - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \\ &= 1 - T_n. \end{aligned}$$

Donc la suite $(1-T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc

$$\boxed{\text{la suite } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

b) On sait que $\lim_{n\to+\infty} T_n = \gamma$, donc : $T_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$,
donc : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$
donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).}$$

Or $\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $\gamma + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln n)$, donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$

Q6. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*, g_n(n) = \frac{1}{2n}$, donc $\|g_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \geqslant |g_n(n)| = \frac{1}{2n}$; or $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique), donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|g_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}$ diverge, donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum g_n \text{ ne converge pas normalement sur }]0\,;+\infty[.}$$

b) f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$ ($x \neq 0$), donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, f'(t) = \frac{-2tx}{(t^2+x^2)^2} \leqslant 0$$

donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, de plus f est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc, d'après **Q1** : $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k-1)$$

donc (au rang $k+1$) :

$$f(k+1) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$

donc :

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et par somme d'inégalités pour k de 1 à n et d'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

c) On remarque que : $f(k) = g_k(x)$ et

$$\begin{aligned}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^n \frac{x}{t^2+x^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\mathrm{Arctan}(\frac{t}{x})\right]_0^n\\ &= \mathrm{Arctan}(\frac{n}{x}) \leqslant \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Donc $\sum g_n(x) = \sum f(n)$ est une série à termes positifs et majorée par $\frac{\pi}{2}$, donc elle converge. De plus

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}(\frac{n}{x}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

et

$$\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Arctan}(\frac{n+1}{x}) - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}).$$

Donc, par passage à la limite des inégalités larges,

$$\boxed{\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leqslant \frac{\pi}{2}.}$$

d) La fonction Arctan est continue en 0, donc $\mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}.}$$

Supposons par l'absurde : $\sum g_n$ converge uniformément sur $]0\,;+\infty[$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} g_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$$

donc : $\frac{\pi}{2} = 0$, d'où la contradiction.
Donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum g_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]0\,;+\infty[.}$$

Q7. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} &= \int_n^{n+\frac12} \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t - \int_{n+\frac12}^{n+1} \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{-\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_n^{n+\frac12} + \left[\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_{n+\frac12}^{n+1}\\ &= \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}.}$$

b) Soit $x \in [1\,;+\infty[$, on pose $n = \lfloor x \rfloor$, donc $x \geqslant n$ et par positivité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\pi}\\ &\geqslant \frac{2(n-1)}{\pi}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in [1\,;+\infty[, \int_1^x |\sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t| \geqslant \frac{2}{\pi}(\lfloor x \rfloor - 1).}$$

Or : $\frac{2}{\pi}(\lfloor x \rfloor - 1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc par comparaison,

$$\int_1^x |\sin(2\pi t|\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ n'est pas intégrable sur } [1\,;+\infty[.}$$

Et, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = |\sin(2\pi n)| = 0$, donc

$$\boxed{\sum f(n) \text{ est convergente (de somme nulle).}}$$

Cette fonction fournit donc un contre exemple à **Q3** sans l'hypothèse de monotonie avec l'intégrale divergente et la série convergente.

Q8. L'aire du triangle est $\frac{2a_n \times 1}{2} = a_n$, donc

$$\boxed{\text{si } a_n = \frac{1}{n^2}\text{, alors l'aire du triangle est } \frac{1}{n^2}.}$$

Dessiner l'allure de la courbe.

Pour que les triangles soient disjoints, on ne considère les triangles qu'à partir de $n = 2$.

La fonction f est affine apar morceaux, donc continue par morceaux sur $[1\,;+\infty[$ et positive sur $[1\,;+\infty[$.

On effectue les calculs dans $[0\,;+\infty]$:

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

car $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente $(2 > 1)$. Donc $f \in L^2([1\,;+\infty[)$. Or $\forall n \geqslant 2, f(n) = 1$, donc la série $\sum f(n)$ diverge grossièrement.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Cette fonction } f \text{ fournit un contre exemple avec à la comparaison série}\\ \text{intégrale (sans l'hypothèse de monotonie) avec } f \text{ intégrable et la série}\\ \text{divergente.}\end{array}}$$

Exercice 1 : Théorème de décomposition de Dunford

Non continuité de l'application $A \mapsto D$

Q9. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables, en effet A est diagonale et $\chi_B = X(X-1)$ est simplement scindé. Et $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\chi_{A+B} = (X-1)^2$, supposons par l'absurde $A+B$ diagonalisable, donc son polynôme minimal est simplement scindé et a les mêmes racines que sont polynôme caractéristique, donc $\mu_{A+B} = (X-1)$, donc $A + B - I_2 = 0$: contradiction. Donc $A, B \in \mathcal{D}$ et $A + B \notin \mathcal{D}$; donc $\mathcal{D}$ n'est pas un espace vectoriel si $n = 2$.
Plus généralement, pour $n \geqslant 2$, quitte à compléter les matrices A et B avec des coefficients nuls, on obtient

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

Soit P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc cette application est continue.

$$\boxed{\text{l'application de } M_n(\mathbb{C}) \text{ vers } M_n(\mathbb{C}),\ M \mapsto PMP^{-1} \text{ est continue.}}$$

Q10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc A est trigonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. On note $t_1, \dots, t_n$ les coefficients diagonaux de T et on pose :

$$\delta = \min\left\{|t_k - t_j| ; k, j \in [\![1 ; n]\!], t_k \neq t_j\right\} \text{ et } D = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right)$$

Montrons que : $\forall x \in]0 ; \delta[, T + xD \in \mathcal{D}$.
Soit $x \in]0 ; \delta[$, donc $T + xD$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont : $t_k + \frac{kx}{n}$.
Soit $j, k \in [\![1 ; n]\!]$ avec $j \neq k$
1er cas : $t_k = t_j$, donc

$$\left(t_k + \frac{kx}{n}\right) - \left(t_j + \frac{jx}{n}\right) = \frac{(k-j)x}{n} \neq 0$$

car $j \neq k$.
2e cas : $t_k \neq t_j$, donc

$$\begin{aligned} &\left|\left(t_k + \frac{kx}{n}\right) - \left(t_j + \frac{jx}{n}\right)\right| \\ &\geqslant |t_k - t_j| - \frac{|k-j|\,x}{n} \\ &\geqslant \delta - \frac{|k-j|\,x}{n} > 0 \qquad (\text{car } |k-j| < n \text{ et } x < \delta) \end{aligned}$$

Donc $T + xD$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont 2 à deux distincts ; donc son polynôme caractéristique est simplement scindé, donc $T + xD \in \mathcal{D}$.
Donc : $\forall k \geqslant 2, T_k = T + \frac{\delta}{k} D \in \mathcal{D}$ et $T_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} T$.
Donc : $\forall k \geqslant 2, A_k = PT_kP^{-1} \in \mathcal{D}$ (car semblable à T_k diagonalisable) ; de plus $T_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} T$ et $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue ; donc $A_k = PT_kP^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} PTP^{-1} = A$.
Conclusion, d'après la caractérisation séquentielle de la densité,

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est dense dans } M_n(\mathbb{C}).}$$

Q11. Soit $A \in \mathcal{D}$, alors $A = A + 0$ avec $A \in \mathcal{D}$, 0 nilpotente (car $0^1 = 0$) et $A \times 0 = 0 \times A = 0$; donc par unicité de la décomposition de Dunford, $\varphi(A) = A$.
Donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est l'application identité sur } \mathcal{D}.}$$

Supposons par l'absurde que φ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, or $\forall A \in \mathcal{D}, \varphi(A) = A$ et $\mathcal{D}$ dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'après la question précédente ; donc : $\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Donc pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \varphi(A) = A$ est diagonalisable, donc $\mathcal{D} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: absurde car d'après la question **Q9**, $\mathcal{D}$ n'est pas un espace vectoriel.
Conclusion :

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ n'est pas continue.}}$$

Exercice 2

Q12. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et

$$\frac{1}{k} I_n \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\left\|\frac{1}{k} I_n - 0\right\| = \frac{1}{k}\|I_n\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus $0 \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc par caractérisation séquentielle des fermés :

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas un fermé de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q13. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, or det est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$; donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est ouvert dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q14. Le spectre de M, $\mathrm{Sp}(M)$ est un ensemble fini (de cardinal inférieur à n), donc $\mathrm{Sp}(M) \cap]0\,;+\infty[$ est fini.

1er cas : $\mathrm{Sp}(M) \cap]0\,;+\infty[= \varnothing$,
on pose alors $\rho = 1$.

2ième cas : $\mathrm{Sp}(M) \cap]0\,;+\infty[\neq \varnothing$,
donc : $\mathrm{Sp}(M) \cap]0\,;+\infty[$ est une partie finie non vide de $\mathbb{R}$, soit ρ son plus petit élément.

Dans sous les cas, $\rho \in]0\,;+\infty[$ et pour tout $\lambda \in]0\,;\rho[, \lambda \notin \mathrm{Sp}(M)$, donc

$$\boxed{\exists \rho > 0, \quad \forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $M_k = M - \frac{\rho}{k+2} I_n$; donc : $\forall k \in \mathbb{N}, M_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

On a montré que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que $M_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} M$. Donc, par caractéristion séquentielle :

$$\boxed{\text{l'ensemble } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q15. D'après la question précédente, il existe $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A$.

Soit $x \in \mathbb{R}$; pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A_k B - x I_n = A_k (B A_k - x I_n) A_k^{-1}$$

donc :

$$\det(A_k B - x I_n) = \det(A_k)\det(B A_k - x I_n)\det(A_k)^{-1} = \det(B A_k - x I_n)$$

Or : $A_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} A$ et $M \mapsto MB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc $M \mapsto MB$ est continue ; donc $A_k B \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} AB$. Puis par opération sur les limites, $A_k B - x I_n \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} AB - x I_n f$. Enfin, par continuité de l'application det de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$,

$$\det(A_k B - x I_n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \det(AB - x I_n) = \chi_{AB}(x).$$

De même :

$$\det(B A_k - x I_n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \det(BA - x I_n) = \chi_{BA}(x);$$

et on sait que : $\forall k \in \mathbb{N}, \det(A_k B - x I_n) = \det(B A_k - x I_n)$.

Donc : $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$; valable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc :

$$\boxed{\text{les matrices } A.B \text{ et } B.A \text{ ont le même polynôme caractéristique.}}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $AB = 0$, donc $\mu_{AB} = X$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $X(BA) \neq 0$: μ_{AB} n'est pas un polynôme annulateur de BA.

$$\boxed{\text{les matrices } AB \text{ et } BA \text{ n'ont pas toujours le même polynôme annulateur.}}$$

Q16. On suppose par l'absurde que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Or la fonction det est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, donc $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs (car image directe d'une partie connexe par arcs par une fonction continue). Or $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ n'est pas un intervalle et les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ; d'où la contradiction.

Donc :

$$\boxed{\text{Démontrer que } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas connexe par arcs.}}$$