

Centrale PSI 2025 PhCh (extrait)

Q1. On écrit la réaction : $\boxed{\text{CH}_4(g) + 2\text{O}_2(g) = \text{CO}_2(g) + 2\text{H}_2\text{O}(g)}$

Avec la loi de Hess, on calcule : $\Delta_r H^0 = -\Delta_f H^0(\text{CH}_4, g) - 2\Delta_f H^0(\text{O}_2, g) + \Delta_f H^0(\text{CO}_2, g) + 2\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}, g)$.

Numériquement, $\Delta_r H^0 = 74,9 - 0 - 393,5 - 2 * 241,8 = \boxed{-802,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$.

Puis $\Delta_r S^0 = -S^0(\text{CH}_4, g) - 2S^0(\text{O}_2, g) + S^0(\text{CO}_2, g) + 2S^0(\text{H}_2\text{O}, g)$.

Numériquement, $\Delta_r S^0 = -186,2 - 2 * 205 + 213,8 + 2 * 188,7 = \boxed{-5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}}$.

On obtient ensuite $\boxed{\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0}$ puis $\boxed{K^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT}\right)}$.

Numériquement, à $T = 298 \text{ K}$, le calcul donne $\boxed{K^0 = 2,6 \cdot 10^{140}}$. C'est très très grand devant 1, donc la réaction peut bien être considérée comme quasi-quantitative à 298K.

Pour déterminer le PCI, on prend comme système une masse m_0 de gaz naturel, donc un nombre de moles n_0 de gaz naturel, et un nombre de moles $2n_0$ de dioxygène, de sorte que les proportions soient stoechiométriques.

On applique le premier principe à ce système sur une durée correspondant à la consommation totale des deux réactifs, et en supposant que toute l'énergie thermique dégagée par la réaction est fournie à l'extérieur. Puisque la transformation est isobare, cela donne : $\Delta H = Q_{reçue} = -Q_{dégagée}$.

D'où $\Delta_r H^0(\xi_f - \xi_i) = -Q_{dégagée}$, c'est-à-dire $\Delta_r H^0(n_0 - 0) = -Q_{dégagée}$, puisque la réaction est quasi-quantitative.

On en déduit $q_{gn} = \frac{Q_{dégagée}}{m_0} = -\frac{\Delta_r H^0 n_0}{m_0} = -\frac{\Delta_r H^0}{M_{CH_4}}$. D'où $PCI = \boxed{q_{gn} = -\frac{\Delta_r H^0}{M_{CH_4}}}$.

Numériquement, $\boxed{q_{gn} = 50,1 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$.

Q2. Le débit molaire de gaz naturel est $D_{n,gn} = \frac{D_{m,gn}}{M_{CH_4}}$. Et, compte tenu de l'écriture de la réaction, le débit molaire de dioxygène, en proportions stoechiométriques doit être $D_{n,O_2} = 2D_{n,gn}$.

Le débit massique d'air pour les proportions stoechiométriques doit donc être $D_{m0} = (M_{O_2} + 4M_{N_2}) \times 2D_{n,gn}$.

Il vient donc $\boxed{D_{m0} = \frac{M_{O_2} + 4M_{N_2}}{M_{CH_4}} \times 2D_{m,gn}}$.

Numériquement, $\boxed{D_{m0} = \frac{32+4 \times 28}{16} \times 2 \times 9,66 = 18 \times 9,66 = 174 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}$.

Dans ces conditions, la puissance thermique dégagée par la réaction est $\boxed{\mathcal{P}_{th0} = D_{m,gn} \times q_{gn}} = \boxed{484 \text{ MW}}$.

Q3. On effectue un bilan classique d'enthalpie.

Soit le système constitué initialement de n_0 moles de $\text{CH}_4(g)$, $2n_0$ moles de $\text{O}_2(g)$, $8n_0$ moles de $\text{N}_2(g)$, à $T_e = 298 \text{ K}$.

On imagine un état intermédiaire fictif pour lequel le système est constitué de n_0 moles de $\text{CO}_2(g)$, $2n_0$ moles de $\text{H}_2\text{O}(g)$, $8n_0$ moles de $\text{N}_2(g)$, à $T_e = 298 \text{ K}$.

Et dans l'état final, il y a n_0 moles de $\text{CO}_2(g)$, $2n_0$ moles de $\text{H}_2\text{O}(g)$, $8n_0$ moles de $\text{N}_2(g)$, à T_s , que l'on cherche.

En appliquant le premier principe à ce système, en évolution isobare et adiabatique, on peut écrire :

$\Delta H = Q = 0$, d'où $\Delta_r H^0(n_0 - 0) + n_0 \times (C_{pm}(\text{CO}_2(g)) + 2C_{pm}(\text{H}_2\text{O}(g)) + 8C_{pm}(\text{N}_2(g))) \times (T_s - T_e) = 0$.

Il vient $T_s = T_e - \frac{\Delta_r H^0}{C_{pm}(\text{CO}_2(g)) + 2C_{pm}(\text{H}_2\text{O}(g)) + 8C_{pm}(\text{N}_2(g))}$,

ou encore $\boxed{T_s = T_e + \frac{q_{gn} M_{CH_4}}{C_{pm}(\text{CO}_2(g)) + 2C_{pm}(\text{H}_2\text{O}(g)) + 8C_{pm}(\text{N}_2(g))}}$. Numériquement, $\boxed{T_s = 2405^\circ\text{C} = 2678 \text{ K}}$.

C'est une température très élevée, le modèle est à revoir.

Q4. Dans le bilan d'enthalpie de la question précédente, si on ne se place pas dans les conditions stoechiométriques, on fait diminuer la température de sortie : si la quantité d'air est insuffisante, l'avancement final est plus faible ($\xi_f < n_0$), et si la quantité d'air est trop importante, on augmente la quantité de spectateurs à réchauffer entre l'état fictif intermédiaire et l'état final. C'est ce qui se passe si $D_{m,air} > D_{m0}$.

Q5. Adoptons les notations de l'énoncé.

Tout d'abord, explicitons le lien général entre un débit massique et un débit molaire : $D_{m,i} = M_i \times F_i$.

On ajoutera des indices « e » en entrée et « s » en sortie.

Pour faire le tableau ci-dessous, on raisonne comme quand on fait un bilan de matière pour une réaction chimique, la différence étant qu'on utilise un avancement par unité de temps $\frac{d\xi}{dt}$ plutôt qu'un avancement ξ . Et, comme on l'a vu dans Q2, le débit massique d'air est égal à $(M_{O_2} + 4M_{N_2})$ fois le débit molaire de dioxygène.

Espèce	$CH_{4(g)}$	$O_{2(g)}$	$CO_{2(g)}$	$H_2O_{(g)}$	$N_{2(g)}$
Débit molaire en entrée	$F_{gn,e} = \frac{D_{m,gn}}{M_{CH_4}}$	$F_{O_2,e} = \frac{D_{m,air}}{M_{O_2} + 4M_{N_2}}$	0	0	$F_{N_2,e} = \frac{4D_{m,air}}{M_{O_2} + 4M_{N_2}}$
Débit molaire en sortie	$0 = F_{gn,e} - \frac{d\xi}{dt}$	$F_{O_2,e} - \frac{2d\xi}{dt}$	$\frac{d\xi}{dt}$	$\frac{2d\xi}{dt}$	$F_{N_2,e}$
Débit molaire en sortie	0	$\frac{D_{m,air}}{M_{O_2} + 4M_{N_2}} - 2\frac{D_{m,gn}}{M_{CH_4}}$	$\frac{D_{m,gn}}{M_{CH_4}}$	$2\frac{D_{m,gn}}{M_{CH_4}}$	$\frac{4D_{m,air}}{M_{O_2} + 4M_{N_2}}$
Débit molaire en sortie	$F_{gn,s} = 0$	$F_{O_2,s} = \frac{D_{m,air} - D_{m0}}{M_{O_2} + 4M_{N_2}}$	$F_{CO_2,s} = \frac{D_{m0}}{2(M_{O_2} + 4M_{N_2})}$	$F_{H_2O,s} = \frac{D_{m0}}{M_{O_2} + 4M_{N_2}}$	$F_{N_2,s} = \frac{4D_{m,air}}{M_{O_2} + 4M_{N_2}}$

Q6. Reprenons la démarche de Q3, en raisonnant sur une durée dt :

$$\Delta_r H^0 (F_{gn,e} dt - 0) + (F_{O_2,s} dt C_{pm}(O_{2(g)}) + F_{CO_2,s} dt C_{pm}(CO_{2(g)}) + F_{H_2O,s} dt C_{pm}(H_2O_{(g)}) + F_{N_2,s} dt C_{pm}(N_{2(g)})) \times (T'_s - T_e) = 0$$

C'est-à-dire, après simplification par dt :

$$\Delta_r H^0 F_{gn,e} + (F_{O_2,s} C_{pm}(O_{2(g)}) + F_{CO_2,s} C_{pm}(CO_{2(g)}) + F_{H_2O,s} C_{pm}(H_2O_{(g)}) + F_{N_2,s} C_{pm}(N_{2(g)})) \times (T'_s - T_e) = 0$$

Et remplaçant les débits molaires en sortie, puis en multipliant par $M_{O_2} + 4M_{N_2}$:

$$\Delta_r H^0 \frac{D_{m0}}{2} + ((D_{m1} - D_{m0}) C_{pm}(O_{2(g)}) + \frac{D_{m0}}{2} C_{pm}(CO_{2(g)}) + D_{m0} C_{pm}(H_2O_{(g)}) + 4D_{m1} C_{pm}(N_{2(g)})) \times (T'_s - T_e) = 0,$$

$$\text{Ou } \Delta_r H^0 \frac{D_{m0}}{2(T'_s - T_e)} + ((D_{m1} - D_{m0}) C_{pm}(O_{2(g)}) + \frac{D_{m0}}{2} C_{pm}(CO_{2(g)}) + D_{m0} C_{pm}(H_2O_{(g)}) + 4D_{m1} C_{pm}(N_{2(g)})) = 0,$$

$$\text{Ou encore : } D_{m1} (C_{pm}(O_{2(g)}) + 4C_{pm}(N_{2(g)})) = D_{m0} (C_{pm}(O_{2(g)}) - \frac{1}{2} C_{pm}(CO_{2(g)}) - C_{pm}(H_2O_{(g)}) - \frac{\Delta_r H^0}{2(T'_s - T_e)})$$

$$\text{Il vient } D_{m1} = D_{m0} \frac{C_{pm}(O_{2(g)}) - \frac{1}{2} C_{pm}(CO_{2(g)}) - C_{pm}(H_2O_{(g)}) - \frac{\Delta_r H^0}{2(T'_s - T_e)}}{C_{pm}(O_{2(g)}) + 4C_{pm}(N_{2(g)})}.$$

Pour que la turbine fonctionne à sa température maximale sans produire de NO_x , on choisit

$$T'_s = 1300^\circ\text{C} = 1573 \text{ K, d'où : } D_{m1} = 18 \times 9,66 \times \frac{29,4 - 14,55 - 33,6 + \frac{802,2 \cdot 10^3}{2 \times 1275}}{29,4 + 4 \times 29,1} = 353 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Q7. En prenant en compte la dépendance des capacités thermiques massiques avec la température, le calcul de Q6 devient :

$$\Delta_r H^0 \frac{D_{m0}}{2} + (D_{m,air} - D_{m0}) \int_{T_e}^{T_s} C_{pmO_2}(T) dT + \frac{D_{m0}}{2} \int_{T_e}^{T_s} C_{pmCO_2}(T) dT + D_{m0} \int_{T_e}^{T_s} C_{pmH_2O}(T) dT + 4D_{m,air} \int_{T_e}^{T_s} C_{pmN_2}(T) dT = 0,$$

Il vient
$$D_{m,air} = D_{m0} \frac{\int_{T_e}^{T_s} C_{pmO_2}(T) dT - \frac{1}{2} \int_{T_e}^{T_s} C_{pmCO_2}(T) dT - \int_{T_e}^{T_s} C_{pmH_2O}(T) dT - \frac{\Delta_r H^0}{2}}{\int_{T_e}^{T_s} C_{pmO_2}(T) dT + 4 \int_{T_e}^{T_s} C_{pmN_2}(T) dT}.$$

Q8. Unités : $[A] = J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$;

$$[B] = J \cdot K^{-2} \cdot mol^{-1} ; [C] = J \cdot K^{-3} \cdot mol^{-1} ;$$

$$[D] = J \cdot K^{-4} \cdot mol^{-1} ; [E] = J \cdot K \cdot mol^{-1}.$$

Voici ci-contre une proposition de programme python pour l'intégrale :

```
def int_Cpm (gaz , T1 , T2):
    N=1000
    dT=(T2-T1)/N
    int=0
    for i in range(N):
        int=int+dT*Cpm(T1+i*dT,gaz)
    return int
```

Q9. Le graphe de la figure 3 montre, comme prévu, que la température de sortie est maximale lorsque le dioxygène est introduit en proportions stoechiométriques. La figure donne un D_{m0} assez voisin de la valeur $174 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ trouvé en Q2. En revanche, pour ce débit d'air, la température de sortie est d'environ 2250 K, alors que le modèle simplifié donnait 2678 K.

Pour obtenir une température de sortie de 1573K, avec un débit d'air supérieur à celui des conditions stoechiométriques, il faut, d'après la courbe, choisir $D_{m,air} = 305 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, alors qu'on avait trouvé 353 en Q6.

Cela s'explique par le fait qu'aux hautes températures, les capacités thermiques molaires qui augmentent beaucoup sont celles de CO_2 et de H_2O , c'est-à-dire les deux espèces qui étaient affectées d'un signe moins dans l'expression de D_{m1} .

Comme la masse se conserve, on a $D_{m,s} = D_{m,e}$, c'est-à-dire

$$D_{m,s} = D_{m,air} + D_{m,gn} = 305 + 9,66 = 315 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On peut le vérifier : d'après le tableau de Q5, le débit massique de gaz en sortie de la turbine est :

$$D_{m,s} = M_{O_2} F_{O_2,s} + M_{CO_2} F_{CO_2,s} + M_{H_2O} F_{H_2O,s} + M_{N_2} F_{N_2,s}$$

$$\text{C'est-à-dire : } D_{m,s} = M_{O_2} \frac{D_{m,air} - D_{m0}}{M_{O_2} + 4M_{N_2}} + M_{CO_2} \frac{D_{m0}}{2(M_{O_2} + 4M_{N_2})} + M_{H_2O} \frac{D_{m0}}{M_{O_2} + 4M_{N_2}} + M_{N_2} \frac{4D_{m,air}}{M_{O_2} + 4M_{N_2}}$$

$$\text{Ou encore } D_{m,s} = \frac{2(D_{m,air} - D_{m0})M_{O_2} + D_{m0}(M_{CO_2} + 2M_{H_2O}) + 8D_{m,air}M_{N_2}}{2(M_{O_2} + 4M_{N_2})}.$$

$$\text{Numériquement, } D_{m,s} = \frac{2 \times (305 - 174) \times 32 + 174 \times (44 + 36) + 8 \times 305 \times 28}{2 \times (32 + 112)} = \frac{2 \times 131 \times 32 + 174 \times 80 + 8 \times 305 \times 28}{2 \times 144} = 315 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Q10. Question pas claire, car on nous parle de la centrale électrique DK6, donc globale, alors qu'on n'a étudié que la partie turbine à gaz. Si on considère que l'énergie des fumées sidérurgique est gratuite, alors,

$$\eta = \frac{\varphi_{elec\ tot}}{\varphi_{th0}} = \frac{165 + 230}{484} = 82\%.$$

Q11. Le point E est sur la courbe de saturation.

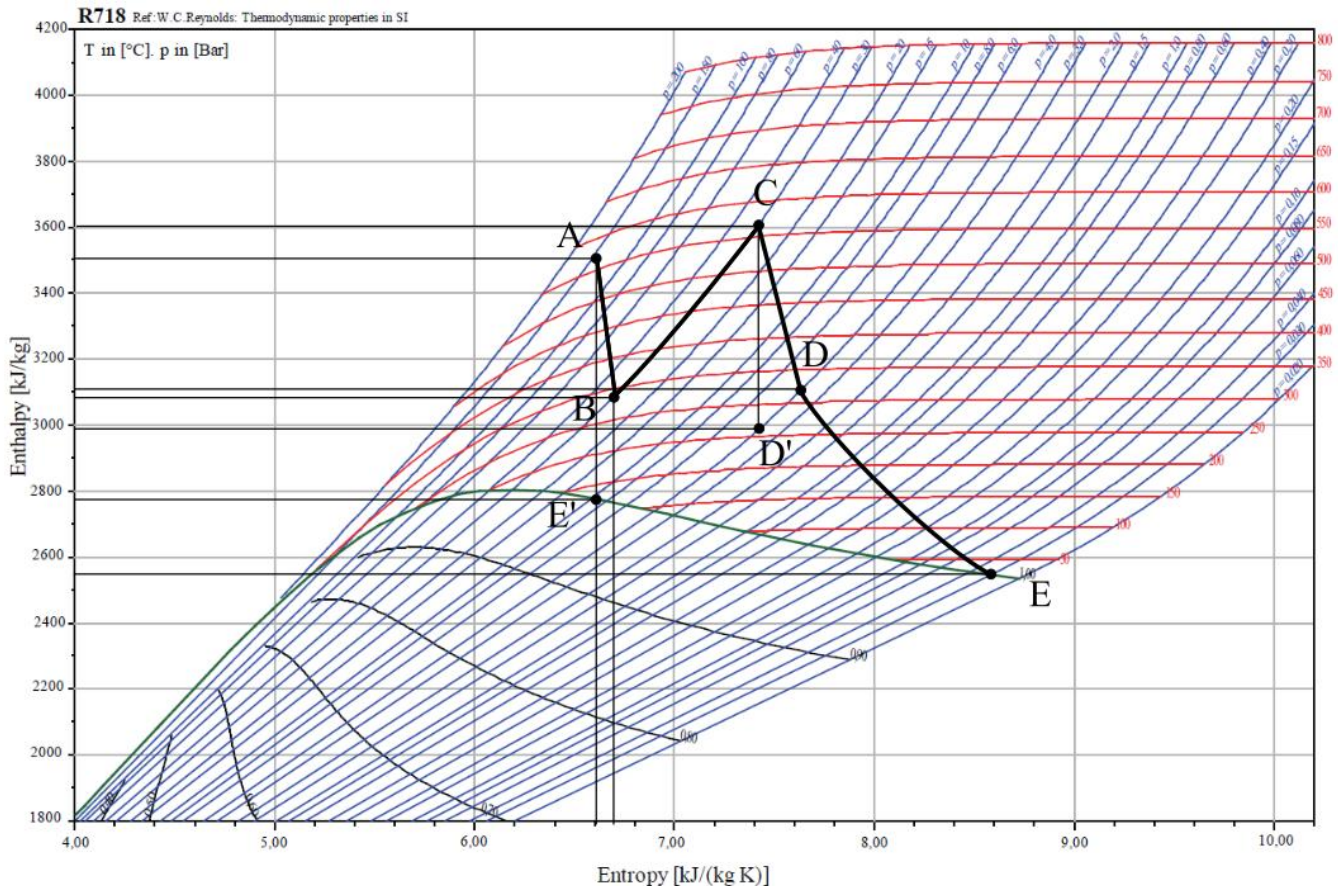


FIGURE 1 – Diagramme de Mollier de l'eau

Q12. Entre les points A et B, l'entropie massique passe de 6,6 à 6,7 kJ. K⁻¹. kg⁻¹, ce qui fait une variation de moins de 2%. On peut donc en effet négliger cette variation.

Avec le modèle du gaz parfait, la loi de Laplace s'écrit : $T_A^\gamma P_A^{(1-\gamma)} = T_B^\gamma P_B^{(1-\gamma)}$, d'où $T_B = T_A \left(\frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

Numériquement, $T_B = 838 \times \left(\frac{30}{144} \right)^{\frac{(0,30)}{(1,30)}} = 583 \text{ K} = \boxed{310^\circ \text{C}}$.

Le modèle du gaz parfait donne une valeur pas très éloignée, mais l'erreur est tout de même d'un peu plus de 3%.

Q13. D'après le document 1, la section à travers laquelle passe la vapeur à l'entrée de la turbine haute pression est $S_A = \pi((R_0 + a)^2 - R_0^2)$,

et donc la vitesse débitante est $v_A = \frac{D_m}{\rho_A S_A} = \frac{534 \cdot 10^3}{3600 \times 33 \times \pi \times (0,337^2 - 0,296^2)} = \boxed{55,1 \text{ m.s}^{-1}}$.

Si la section de sortie était de même dimension que celle d'entrée, on aurait $v_B = \frac{D_m}{\rho_B S_A} = v_A \frac{\rho_A}{\rho_B} = \boxed{165 \text{ m.s}^{-1}}$.

L'intérêt d'avoir une vitesse débitante à peu près constante dans la turbine est de pouvoir utiliser des aubes de mêmes formes, et d'avoir des interactions aérodynamiques similaires dans tous les étages.

Pour avoir v_B proche de v_A , il suffit de rendre la section S_B plus grande que S_A , ce qui est confirmé par le document 1, puisque $a' > a$.

Q14. La version puissance du premier principe industriel de la thermodynamique permet d'écrire, en s'intéressant à l'entrée et à la sortie de la turbine haute pression, considérée parfaitement calorifugée :

$$D_m \left(h_B - h_A + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} \right) = -\dot{\varphi}_{THP}$$

C'est-à-dire, puisqu'on nous dit que $v_B \simeq v_A$, $\dot{\varphi}_{THP} \simeq D_m(h_A - h_B)$.

On lit sur le diagramme de Mollier que $h_B = 3085 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $h_A = 3500 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Il vient $\dot{\varphi}_{THP} \simeq \frac{534.10^3}{3600} \times 415.10^3 = \boxed{61,6 \text{ MW}}$.

Q15. Avec une unique turbine isentropique faisant passer $\boxed{\text{de A à E}}$ (point de vapeur saturante sur la même isentrope que A), on aurait $\dot{\varphi}_{tot} \simeq \frac{534.10^3}{3600} \times (3500 - 2780).10^3 = \boxed{107 \text{ MW}}$.

Q16. Le premier principe industriel entre l'entrée et la sortie du surchauffeur, dans lequel il n'y a pas de pièce mécanique mobile, conduit à : $\dot{\varphi}_{SC} = D_m(h_C - h_B) = \frac{534.10^3}{3600} \times (3600 - 3085).10^3 = \boxed{76,4 \text{ MW}}$.

Pour la puissance mécanique totale, transmise à l'arbre,

$$\dot{\varphi}_{m \text{ tot}} = D_m(h_A - h_B + h_C - h_E) = \frac{534.10^3}{3600} \times (3500 - 3085 + 3600 - 2550).10^3 = \boxed{217 \text{ MW}}$$

C'est bien mieux qu'avec une unique turbine, même si on retire le coût énergétique du surchauffeur.

Q17. Le point D' sur le diagramme de Mollier correspond à une évolution adiabatique réversible depuis le point C , D' et D étant à la même pression, $p_D = 4,0 \text{ bar}$.

Si on allait de C à D' , la puissance mécanique qui serait transmise à l'arbre à travers la turbine moyenne pression serait

$$\dot{\varphi}_{TMP} = D_m(h_C - h_{D'}) = \frac{534.10^3}{3600} \times (3600 - 2995).10^3 = \boxed{90 \text{ MW}}$$

Les pertes adiabatiques valent $\dot{\varphi}_{pertes \text{ adia}} = D_m(h_D - h_{D'}) = \frac{534.10^3}{3600} \times (3105 - 2995).10^3 = \boxed{16 \text{ MW}}$.

Q18. Le premier principe industriel pour la vapeur entre l'entrée et la sortie du condenseur s'écrit, en notant $\dot{\varphi}_{vap \rightarrow mer}$ la puissance thermique que reçoit l'eau de mer de la part de la vapeur qui se liquéfie :

$$D_m(h_{liq} - h_{vap}) = -\dot{\varphi}_{vap \rightarrow mer}$$

Ou encore $D_m l_{vap} = \dot{\varphi}_{vap \rightarrow mer}$.

Et le principe industriel pour l'eau de mer entre l'entrée et la sortie du condenseur s'écrit (en assimilant l'eau de mer à de l'eau pure, puisque les caractéristiques de l'eau de mer ne sont pas fournies :

$$Q \rho_{eau} (h_s - h_e) = +\dot{\varphi}_{vap \rightarrow mer}$$

Ou encore $Q \rho_{eau} c_{eau} (\theta_s - \theta_e) = +\dot{\varphi}_{vap \rightarrow mer}$.

Il vient donc $Q \rho_{eau} c_{eau} (\theta_s - \theta_e) = D_m l_{vap}$ puis $\theta_s = \theta_e + \frac{D_m l_{vap}}{Q \rho_{eau} c_{eau}}$.

$$\text{Numériquement, } \theta_s = 15 + \frac{534.10^3 \times 2,3.10^6}{33.10^3 \times 1000 \times 4180} = 15 + \frac{534 \times 2,3}{33 \times 4,18} = \boxed{23,9^\circ\text{C}}$$

Conclusion : la température de sortie est $\boxed{\text{nettement en-dessous de la température maximale de } 30^\circ\text{C tolérée}}$ par les écosystèmes.

Q19. Le temps caractéristique de l'écoulement à travers le stator est $\tau_{éc} = \frac{b}{v_A}$. Celui caractéristique de la diffusion thermique dans les aubes est τ_{diff} . La diffusion thermique étant un phénomène très lent, on peut supposer que $\tau_{diff} \gg \tau_{éc}$.

Q20. Puisque la vapeur est assimilée à un gaz parfait, en évolution isentropique, on peut utiliser une des lois de Laplace, ici, celle reliant température et pression : $T^\gamma p^{(1-\gamma)} = Cte$. Donc en utilisant la différentielle logarithmique : $\gamma \frac{dT}{T} + (1-\gamma) \frac{dp}{p} = 0$, ou encore $dp = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{T} dT$. $dT = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T}{p} dp$ Et puisque les variations sont considérées petites, ici, en valeurs relatives, on peut remplacer les « d » par des « Δ » : $\Delta T_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_A}{p_A} \Delta p_1$.

Le premier principe industriel (une fois de plus dans cette épreuve) appliqué à la vapeur d'eau entre l'entrée et la sortie du stator, s'écrit : $c_p \Delta T_1 + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_A^2) = 0$, puisqu'il n'y a pas de pièces mécaniques mobiles dans le stator.

D'où
$$v_1 = \sqrt{v_A^2 - 2c_p \Delta T_1}.$$

Numériquement,
$$\Delta T_1 = -\frac{0,3}{1,3} \times \frac{838}{144} \times 7,3 = -9,8\text{K} = -9,8^\circ\text{C}$$
 et
$$v_1 = 206 \text{ m.s}^{-1}.$$

Q21. L'angle d'inclinaison de 15° choisi se justifie par la courbe du document 2 donnant le C_L : Pour $Re = 6.10^6$ (courbe en pointillés), c'est l'angle d'inclinaison qui rend C_L maximum. Il vaut $C_L = 1,7$. Et la seconde courbe donne le coefficient de traînée : $C_D = 0,054$.

La puissance mécanique transmise par le fluide au premier étage de la turbine est $\mathcal{P}_1 = \Gamma_1 \cdot \Omega$, Γ_1 étant le moment des forces aérodynamiques du premier étage par rapport à l'axe de la turbine.

Seules les forces de portances ont un moment non nul par rapport à l'axe de rotation, puisque les forces de traînée sont parallèles à l'axe. Le bras de levier étant R_0 , et compte tenu de la présence de N aubes, et de la masse volumique ρ_1 de la vapeur dans le premier étage :

$$\Gamma_1 = NR_0 \times \frac{1}{2} \rho_1 w_1^2 ab C_L$$

$$\text{Soit } \Gamma_1 = NR_0 \times \frac{1}{2} \rho_1 (v_1^2 - \Omega^2 R_0^2) ab C_L.$$

$$\text{Il vient } \mathcal{P}_1 = \frac{N \Omega R_0 \rho_1 (v_1^2 - \Omega^2 R_0^2) ab C_L}{2}.$$

La vapeur étant assimilée à un gaz parfait, sa masse volumique est donnée par : $\rho = \frac{pM}{RT}$, donc $\rho_1 = \rho_A \frac{p_1}{p_A} \frac{T_A}{T_1}$.

$$\text{Numériquement, } \mathcal{P}_1 = \frac{80 \times 3000 \times \frac{\pi}{30} \times 0,296 \times 33 \times \frac{136,7}{144} \times \frac{838}{828,2} (206^2 - (100\pi \times 0,296)^2) \times 0,041 \times 0,032 \times 1,7}{2}.$$

$$\mathcal{P}_1 = 8,8 \text{ MW}.$$

D'après la question Q14, il faudrait donc 8 étages (contrairement au second dessin de l'énoncé dans le document 1, mais en accord avec la dizaine d'étage indiquée au début du II, et à peu près en accord avec le premier dessin du document 1).

En ce qui concerne la force axiale exercée sur le rotor, elle est due aux N forces de traînée :
$$F_{axe} = \frac{N}{2} \rho_1 w_1^2 ab C_D.$$

$$\text{Numériquement, } F_{axe} = \frac{80}{2} \times 33 \times \frac{136,7}{144} \times \frac{838}{828,2} (206^2 - (100\pi \times 0,296)^2) \times 0,041 \times 0,032 \times 0,054 = \boxed{3,0.10^3 \text{N}}.$$

Q22. On se place dans le référentiel du rotor, qui est quasiment galiléen, car quasiment en translation rectiligne de vitesse \vec{U} par rapport au référentiel du stator, supposé galiléen.

Pour le système dessiné sur l'énoncé, en notant $\delta\Sigma_1$ le fluide qui entre (en clair sur l'image de gauche) entre t et $t + dt$, $\delta\Sigma_2$ le fluide qui sort (en clair sur l'image de droite) entre t et $t + dt$, et Σ_0 le fluide en foncé, commun aux deux images, et en notant Σ^* le système fermé décomposé, le moment cinétique de Σ^* à t est, par rapport à un point O de l'axe : $\vec{\sigma}_O(\Sigma^*, t) = \frac{Dm}{N} dt R_0 \vec{e}_r \wedge \vec{w}_1 + \vec{\sigma}_O(\Sigma_0, t).$

$$\text{Et, à } t + dt : \vec{\sigma}_O(\Sigma^*, t + dt) = \vec{\sigma}_O(\Sigma_0, t + dt) + \frac{Dm}{N} dt R_0 \vec{e}_r \wedge \vec{w}_2.$$

$$\text{En régime stationnaire, } \vec{\sigma}_O(\Sigma_0, t + dt) = \vec{\sigma}_O(\Sigma_0, t).$$

On note $\vec{\Gamma}_1'$ le moment en O des forces exercées par Σ^* sur les deux aubes de part et d'autre, donc $-\vec{\Gamma}_1'$ le moment en O des forces exercées par les deux aubes sur Σ^* .

Le théorème du moment cinétique appliqué à Σ^* dans le référentiel du rotor s'écrit :

$$\boxed{\frac{\vec{\sigma}_O(\Sigma^*, t+dt) - \vec{\sigma}_O(\Sigma^*, t)}{dt} = -\vec{\Gamma}_1'}, \text{ d'où } \vec{\Gamma}_1' = -\frac{Dm}{N} R_0 \vec{e}_r \wedge (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) = -\frac{Dm}{N} R_0 \vec{e}_r \wedge (\vec{v}_2 - \vec{U} - \vec{w}_1).$$

Le moment du couple par rapport à l'axe de rotation, exercé par Σ^* sur les deux aubes est $\Gamma_1' = \vec{\Gamma}_1' \cdot \vec{e}_z$

Et pour l'ensemble des N aubes, $\Gamma_N = N\Gamma_{1'} = D_m R_0 \left(\vec{e}_r \wedge (-\vec{v}_2 + \vec{U} + \vec{w}_1) \right) \cdot \vec{e}_z$.

Or $(\vec{e}_r \wedge \vec{v}_2) \cdot \vec{e}_z = 0$, $(\vec{e}_r \wedge \vec{w}_1) \cdot \vec{e}_z = 0$ et $(\vec{e}_r \wedge \vec{U}) \cdot \vec{e}_z = U$, d'où $\Gamma_N = D_m R_0 U$.

Enfin, la puissance mécanique transmise au rotor par un étage est $\wp_m = \Gamma_N \Omega = \boxed{\Gamma_N \frac{U}{R_0}}$, ce qui donne bien $D_m U^2$.

Numériquement, $\wp_m = \frac{534.10^3}{3600} \times (100\pi * 0,296)^2 = \boxed{1,28 \text{ MW}}$.

Q23. Le premier principe industriel appliqué à la vapeur entre l'entrée et la sortie de la turbine haute pression s'écrit, en supposant encore qu'il n'y a quasiment pas de variation d'énergie cinétique massique :

$h_B - h_A = -2nU^2$, d'où $\boxed{n = \frac{h_A - h_B}{2U^2}}$. Numériquement, $n = \frac{415.10^3}{2 \times (100\pi * 0,296)^2} = \boxed{24}$.

Q24. La puissance mécanique totale réellement transmise à l'arbre à travers les n étages est :

$\wp_m = 2nD_m U^2$. Numériquement, $\wp_m = 2 \times 24 \times \frac{534.10^3}{3600} \times (100\pi * 0,296)^2 = \boxed{61,6 \text{ MW}}$.

On retrouve la valeur de Q14.