

Chapitre 17

Théorèmes des fonctions continues

1. Dans tout le chapitre, on fixe un intervalle non trivial I .
2. Pour une fonction f , on notera \mathcal{D}_f son domaine de définition.
3. On aura toujours $\mathcal{D}_f = I$ ou I privé d'un point.
4. Toutes les fonctions sont à valeurs réelles, sauf dans le paragraphe 7.

1 Continuité

On fixe une fonction f définie sur D_f . On rappelle les définitions vues dans le chapitre sur les limites.

1.1 Continuité en un point

Définition 1.1

Soit $a \in D_f$. La fonction f est *continue* en a si elle admet une limite en a .

Proposition 1.2

Si f est continue en $a \in D_f$, alors $\lim_a f = f(a)$.

Exemple.

Si f est la fonction $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), alors f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors

$$|x^n - a^n| = |x - a| |x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-1}| \leq |x - a| n(|a| + 1)^{n-1}$$

dès que $|x| \leq |a| + 1$. En effet, si $|x| \leq |a| + 1$, on a

$$|a^k x^{n-k-1}| \leq |a|^k |x|^{n-k-1} \leq (|a| + 1)^k (|a| + 1)^{n-k-1} = (|a| + 1)^{n-1}.$$

Soit alors

$$\eta = \min \left(\frac{\varepsilon}{n(|a| + 1)^{n-1}}, 1 \right).$$

Si $|x - a| < \eta$, on a

$$|x| - |a| \leq |x - a| \leq 1 \quad \text{et} \quad |x - a|n(|a| + 1)^{n-1} \leq \varepsilon,$$

donc $|x^n - a^n| < \varepsilon$, donc f est continue en a .

1.2 Prolongement par continuité

Définition 1.3 (Prolongement par continuité)

Soit $a \in I$ et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.

1. La fonction f est *prolongeable par continuité* en a si elle admet une limite finie en a .
2. Le *prolongement par continuité* de f est la fonction

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a, \\ \lim_a f & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1.4

Le prolongement par continuité de f en a , s'il existe, est continu en a .

1.3 Continuité à gauche et à droite

Définition 1.5

Soit $a \in D_f$. La fonction f est continue à gauche (resp. à droite) en a si elle admet une limite à gauche (resp. à droite) en a et si cette limite vaut $f(a)$.

Remarque.

On notera la différence fondamentale avec la définition de la continuité en a . Il ne suffit pas pour la continuité à gauche ou à droite d'avoir l'existence de la limite à gauche ou à droite : une fonction peut avoir une limite à gauche (resp. à droite), sans être continue à gauche (resp. à droite).

Proposition 1.6

Soit $a \in D_f$. La fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a .

2 Propriétés des limites

Dans ce paragraphe, on rappelle les propriétés élémentaires de la continuité qui découle de la définition d'une limite finie en un point.

On considère une fonction f , et on notera D_f son domaine de définition. On aura nécessairement $D_f = I$ ou I privé d'un point.

2.1 Propriétés locales

Proposition 2.1 (Caractère local de la limite)

Soient f et g deux fonctions égales au voisinage d'un point a , avec $a \in D_f$ et $a \notin D_g$. Si f est continue en a , alors g admet une limite finie en a et celle-ci vaut $f(a)$.

Proposition 2.2

Toute fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point.

Proposition 2.3

Si f est continue en a , alors

1. Si $f(a) > 0$, alors f est minorée au voisinage de ce point par un réel > 0 .
2. Si $f(a) \neq 0$, alors $|f|$ est minorée au voisinage de ce point par un réel > 0 .

Proposition 2.4

Le produit d'une fonction continue en a par une fonction tendant vers 0 en a est une fonction tendant vers 0 en a .

2.2 Opérations algébriques sur les fonctions continues

Proposition 2.5 (Combinaisons linéaires de fonctions continues)

Soient f, g deux fonctions continue en $a \in \mathbb{R}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est continue en a .

Proposition 2.6 (Produits de fonctions continues)

Soient f, g deux fonctions continues en $a \in \mathbb{R}$. La fonction fg est continue en a .

Proposition 2.7 (Limite d'un quotient)

Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors $1/f$ est définie au voisinage de a , et est continue en a .

2.3 Composition des limites

Théorème 2.8 (Composée des limites)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et continue en $a \in I$. Soit (u_n) une suite d'éléments de I tels que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$. Alors $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$.

Théorème 2.9 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit f une fonction définie sur I , et $a \in I$, tel que, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$, on a $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$. Alors f est continue en a .

Théorème 2.10 (Continuité d'une fonction composée)

Soient f et g deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Si f est continue en a , et g est continue en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a .

3 Continuité sur un intervalle

Définition 3.1 (Continuité sur un intervalle)

Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en chacun de ses points.

Définition 3.2

Soient I, J des intervalles de \mathbb{R} .

1. On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles. On le note également $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, ou plus simplement $\mathcal{C}^0(I)$.
2. On note $\mathcal{C}(I, J)$, ou $\mathcal{C}^0(I, J)$ l'ensemble des fonctions continues sur I , à valeurs dans J .

Proposition 3.3

Soit I un intervalle non trivial de \mathbb{R} , et $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$. Alors

1. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0(I)$.
2. $fg \in \mathcal{C}^0(I)$.
3. Si f ne s'annule pas, $g/f \in \mathcal{C}^0(I)$.

Proposition 3.4

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} non triviaux. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I)$.

Remarque.

Il faut savoir énoncer ces propositions avec des phrases : les combinaisons linéaires et produits de fonctions continues sur I sont continues sur I . Les quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sont continues sur I . enfin, les composées bien définies de fonctions continues sont continues.

Proposition 3.5

La restriction d'une fonction continue est une fonction continue.

Méthode 3.6

Toutes les fonctions usuelles que nous avons étudiées sont continues sur leur ensemble de définition (\ln , \exp , fonctions trigonométriques et leurs réciproques, fonctions polynomiales, la valeur absolue, les fonctions puissances, fonctions hyperboliques). Souvent, pour montrer qu'une fonction est continue, on montrera qu'elle l'est par produits, combinaisons linéaires, composées de fonctions continues, en ayant eu soin de d'abord déterminer le domaine de définition.

4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.1 (Théorème des valeurs intermédiaires, cas particulier)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors f s'annule sur $[a, b]$.

Théorème 4.2 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f . Autrement dit,

$$\forall d \in [f(a), f(b)], \exists x \in [a, b], d = f(x).$$

Théorème 4.3 (Théorème des valeurs intermédiaires, version condensée)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$.

Méthode 4.4

On peut se servir de ce théorème pour montrer l'existence d'une solution sur un intervalle I à une équation du type $f(x) = 0$, où f est une fonction continue sur I , ou à l'équation $f(x) = g(x)$ (f, g continues sur I) en se ramenant à $f(x) - g(x) = 0$.

Corollaire 4.5

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{C}^0(I)$ une fonction ne s'annulant pas. Alors f est de signe constant.

Corollaire 4.6

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f \in \mathcal{C}^0(I)$. Soient $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. Si f admet des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ en a et b , et que $(\lim_a f)(\lim_b f) < 0$, alors f s'annule sur I .

Remarque.

Voici des cas particuliers importants : $\lim_a f = -\infty$ et $f(b) > 0$ etc..

Théorème 4.7 (Image d'un intervalle par une fonction continue)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

5 Fonction continue sur un segment

Théorème 5.1 (Théorème des bornes atteintes)

Une fonction continue sur un segment admet un minimum et un maximum. Autrement dit, il existe $a, b \in I$ tels que

$$\forall x \in I, f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Exemples.

1. Une fonction > 0 continue sur un segment est minorée par un réel > 0 .

2. Le résultat est faux si la fonction n'est pas continue. Par exemple, si $f(x) = x$ sur $]0, 1]$ et $f(0) = 1$, f n'atteint pas sa borne inférieure qui est 0.
3. Le résultat est faux si la fonction n'est pas définie sur un segment, comme le prouve l'exemple de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* .

Remarque.

On dit aussi qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes".

Proposition 5.2 (Image d'une fonction continue sur un segment)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors $f([a, b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$.

6 Réciproque d'une fonction bijective continue

Proposition 6.1

Soit f une fonction monotone sur un intervalle I telle que $f(I)$ est un intervalle. Alors f est continue.

Proposition 6.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Remarque.

Il faut savoir expliquer graphiquement ces résultats.

Théorème 6.3

Soit f une fonction continue bijective d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$. Alors sa fonction réciproque f^{-1} est continue sur J .

Théorème 6.4 (Théorème de la bijection)

Soient $I = [a, b]$ ($a < b$) un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction continue et strictement monotone sur I . Alors

1. La fonction f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (si f est croissante, $[f(b), f(a)]$ sinon).
2. Sa fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue, strictement monotone, de même sens de variations que f .

Remarque.

On peut remplacer $[a, b]$ par $]a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b[$, en ouvrant les mêmes crochets dans $[f(a), f(b)]$, et en remplaçant le cas échéant $f(a)$ par $\lim_{a^+} f$ ou $f(b)$ par $\lim_{b^-} f$. On peut alors aussi avoir $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

7 Fonctions à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions définies sur I , mais à valeurs complexes. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, on définit alors deux fonctions à valeurs réelles par

$$\forall x \in I, \operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)), \quad \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)).$$

Définition 7.1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors

1. La fonction f est continue en $a \in I$ si elle est définie en a et si elle admet une limite finie en a .
2. La fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

Proposition 7.2

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, et $a \in I$. Alors

1. La fonction f est continue en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues en a .
2. La fonction f est continue sur I si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues sur I .

Proposition 7.3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$.

Si f est continue en a , alors \overline{f} est continue en a .

Si f est continue sur I , alors \overline{f} est continue sur I .

Remarque.

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, les sommes, produits, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas), composées de fonctions continues sont continues.

Voici quelques particularités :

- Le théorème des valeurs intermédiaires n'a aucun sens pour les fonctions à valeurs complexes, mais cf. le cours de spé.
- On peut parler du module de f , qui définit une fonction continue : on peut alors parler de continuité sur un segment par exemple.

8 Compétences

1. Être très précis quand on utilise les théorèmes de ce chapitre.