Corrigé du DM 11

Source : Centrale PC 2023

Q1. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est la série géométrique. D'après le cours :

$$\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 0} x^n\right) = 1 \text{ et pour tout } x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.}$$

Q2. Par le cours, on a :

$$R\left(\sum_{n\geqslant 0} nx^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 0} x^n\right) = 1.$$

Notons $S : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, $S \in \mathcal{C}^\infty(]-1\,;1[)$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 0} nx^n\right) = 1 \text{ et pour tout } x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

Q3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
&R\left(\sum_{n\geqslant 0} \binom{n}{k} x^n\right)\\
&= R\left(\sum_{n\geqslant k} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^n\right)\\
&= R\left(\sum_{n\geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} x^n\right) \quad (\tfrac{1}{k!} \text{ est une constante multiplicative non nulle})\\
&= R\left(\sum_{n\geqslant 0} n^k x^n\right) \quad \left(\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k \text{ car produit de } k \text{ termes équivalents à } n\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

autre solution : on peut montrer que le rayon de convergence est 1 à l'aide du critère de d'Alembert.

On note toujours $S : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Par k dérivations terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = S^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$

cette dernière égalité se prouvant par récurrence (initialisation vérifiée pour $k=0$ et pour l'hérédité, on notera que $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = (1-x)^{-k-1}$ a pour dérivée $x \mapsto (-1)\times(-k-1)\times(1-x)^{-k-2} = \dfrac{k+1}{(1-x)^{k+2}}$ sur $]-1,1[$).

On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n &= 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^n\\
&= \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}\\
&= \frac{x^k}{k!} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\\
&= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 0} \binom{n}{k} x^n\right) = 1 \text{ et pour tout } x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.}$$

Q4. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le cours :

$$R\left(\sum_{n\geqslant 0} n^k x^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 0} x^n\right) = 1.$$

On en déduit que la somme de cette série entière est définie (au moins) sur $]-1,1[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_k \text{ est définie sur }]-1,1[.}$$

Q5. On a $\deg(H_0)=0$ et pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, $\deg(H_j)=j$ (produit de j polynômes de degré 1).
Ainsi, pour tout $j\in\mathbb{N}$, $\deg(H_j)=j$.
La famille $(H_0,\ldots,H_k)$ est donc une famille constituée de $k+1$ polynômes de $\mathbb{R}_k[X]$, espace vectoriel de dimension $k+1$, et cette famille est libre car ces polynômes sont non nuls et de degrés deux à deux distincts.
Ainsi :

$$\boxed{(H_0,\ldots,H_k) \text{ est une base de } \mathbb{R}_k[X].}$$

Comme $X^k\in\mathbb{R}_k[X]$, on peut écrire X^k de façon unique à l'aide de ses coordonnées dans cette base.

$$\boxed{\text{Il existe une unique famille } (\alpha_{k,0},\ldots,\alpha_{k,k}) \text{ dans } \mathbb{R}^{k+1} \text{ telle que } X^k=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j.}$$

Q6. Soit $k\in\mathbb{N}$. En évaluant la relation précédente en 0, on obtient $0^k=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j(0)=\alpha_{k,0}$ car pour tout $j\geqslant 1$, $H_j(0)=0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\alpha_{0,0}=1 \text{ et pour tout } k\in\mathbb{N}^*,\ \alpha_{k,0}=0.}$$

Pour tout $j\in\mathbb{N}$, H_j est de degré j et a pour cœfficient dominant $\dfrac{1}{j!}$.

On a $X^k=\alpha_{k,k}H_k+\underbrace{\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_{k,j}H_j}_{\text{degré }<k}$. Par identification du cœfficient de X^k , on obtient $1=\alpha_{k,k}\dfrac{1}{k!}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N},\ \alpha_{k,k}=k!}.$$

Q7. Soit $(j,k)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1\leqslant j\leqslant k$.
En évaluant l'égalité $X^k=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\alpha_{k,i}H_i$ en j, on obtient $j^k=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\alpha_{k,i}H_i(j)$.
Soit $i\in\mathbb{N}$. Calculons $H_i(j)$.
Pour $i=0$, on a $H_i(j)=1=\dbinom{j}{0}$.

Si $1\leqslant i\leqslant j$ alors $H_i(j)=\dfrac{1}{i!}\displaystyle\prod_{\ell=0}^{i-1}(j-\ell)=\dfrac{1}{i!}\dfrac{j!}{(j-i)!}=\dbinom{j}{i}$.

Si $i>j$ alors $H_i(j)=\dfrac{1}{i!}\displaystyle\prod_{\ell=0}^{i-1}(j-\ell)=0$ car l'un des facteurs du produit est nul.
On en déduit que :

$$j^k=\sum_{i=0}^{j}\alpha_{k,i}\binom{j}{i}=\alpha_{k,j}+\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout couple } (j,k)\in\mathbb{N}^2 \text{ tel que } 1\leqslant j\leqslant k,\ \alpha_{k,j}=j^k-\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}.}$$

Q8. Soit $k\in\mathbb{N}$.
Notons que par les calculs effectués à la question précédente, on a pour tout $(j,n)\in\mathbb{N}^2$, $H_j(n)=\dbinom{n}{j}$.
Soit $x\in]-1,1[$. On a :

$$\begin{aligned}
f_k(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}n^kx^k\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j(n)\right)x^n\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\binom{n}{j}x^n\\
&=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{j}x^n
\end{aligned}$$

par linéarité car pour tout $j\in[\![0,k]\!]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{j}x^n$ converge d'après Q3.

Par Q3, on obtient également :

$$f_k(x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\frac{x^j}{(1-x)^{j+1}}=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\frac{x^j(1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}}=\frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

par mise sur même dénominateur, en posant $P_k=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}X^j(1-X)^{k-j}$.

Montrons l'unicité.

Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x) = \dfrac{Q(x)}{(1-x)^{k+1}}$ alors pour tout $x \in]-1,1[$, $P_k(x) = Q(x)$.
Le polynôme $P_k - Q$ a donc une infinité de racines donc c'est le polynôme nul. D'où $Q = P_k$.
On a donc prouvé :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout } k\in\mathbb{N}, \text{ il existe un unique polynôme réel } P_k \text{ tel que, pour} \\ \text{tout } x\in]-1,1[,\ f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} \text{ et ce polynôme vérifie la relation} \\ P_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}.\end{array}}$$

Q9. Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f_k'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k n x^{n-1} \text{ donc } x f_k'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} x^n = f_{k+1}(x).$$

Comme pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$, on obtient également en dérivant :

$$f_k'(x) = \frac{P_k'(x)(1-x)^{k+1} + P_k(x)(k+1)(1-x)^k}{(1-x)^{2(k+1)}} = \frac{(1-x)P_k'(x) + (k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}}.$$

On a donc pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f_{k+1}(x) = \frac{x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}}.$$

Par unicité établie en Q8, on en déduit :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k.}$$

Q10. Pour tout $x \in]-1,1[$, $f_0(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc par l'unicité établie en Q8, $P_0 = 1$.
D'après la question précédente :

$$P_1 = X(1-X)P_0' + XP_0 = X$$

puis

$$P_2 = X(1-X)P_1' + 2XP_1 = X(1-X) + 2X^2 = X^2 + X$$

puis

$$P_3 = X(1-X)P_2' + 3XP_2 = X(1-X)(2X+1) + 3X(X^2+X) = X^3 + 4X^2 + X.$$

$$\boxed{P_2 = X^2 + X \text{ et } P_3 = X^3 + 4X^2 + X.}$$

Q11. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k est un polynôme unitaire de degré k.
Initialisation : $P_0 = 1$ est bien un polynôme unitaire de degré 0.
Pour plus de commodité dans l'hérédité, vérifions aussi pour $k = 1$: $P_1 = X$ est bien un polynôme unitaire de degré 1.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_k est un polynôme unitaire de degré k.
On a $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.
Comme $k \geqslant 1$, on sait que P_k' est un polynôme de degré $k-1$ et de cœfficient dominant k.
Ainsi, $X(1-X)P_k'$ est un polynôme de degré $k-1+2 = k+1$ et de cœfficient dominant $-k$.
Par ailleurs, $(k+1)XP_k$ est un polynôme de degré $k+1$ et de cœfficient dominant $k+1$.
Par somme, comme $-k + k + 1 = 1 \neq 0$, on en déduit que P_{k+1} est un polynôme unitaire de degré $k+1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ le degré de } P_k \text{ est } k \text{ son cœfficient dominant est 1.}}$$

Q12. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) = P_k(x)$.
Initialisation : Pour $k = 1$, comme $P_1 = X$, on a pour tout $x \in]0,1[$, $x^2 P_1(\frac{1}{x}) = x^2 \times \frac{1}{x} = x = P_1(x)$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) = P_k(x)$.
Par dérivation, on obtient pour tout $x \in]0,1[$:

$$(k+1)x^k P_k(\frac{1}{x}) - x^{k-1}P_k'(\frac{1}{x}) = P_k'(x).$$

Par évaluation de la relation obtenue à la question Q9 en $\frac{1}{x}$, on obtient pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} x^{k+2}P_{k+1}(\frac{1}{x}) &= x^{k+1}(1-\frac{1}{x})P_k'(\frac{1}{x}) + (k+1)x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) \\ &= x^2(1-\frac{1}{x})x^{k-1}P_k'(\frac{1}{x}) + (k+1)P_k(x) \\ &= x^2(1-\frac{1}{x})((k+1)x^kP_k(\frac{1}{x}) - P_k'(x)) + (k+1)P_k(x) \\ &= (x-1)(k+1)x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) + x(1-x)P_k'(x) + (k+1)P_k(x) \\ &= x(k+1)P_k(x) + x(1-x)P_k'(x) \\ &= P_{k+1}(x). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in]0,1[,\ x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x).}$$

Q13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On sait que P_k est un polynôme de degré k donc il existe $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que $P_k = \sum_{j=0}^{k} a_j X^j$.
D'après la question précédente, pour tout $x \in]0,1[$:

$$P_k(x) = x^{k+1}\sum_{j=0}^{k} a_j x^{-j} = \sum_{j=0}^{k} a_j x^{k+1-j} = \sum_{i=1}^{k+1} a_{k+1-i}x^i.$$

Comme le polynôme $P_k - \sum_{i=1}^{k+1} a_{k+1-i}x^i$ a une infinité de racines, il est nul.

On a donc $P_k = \sum_{j=1}^{k+1} a_{k+1-j}x^j$ et par unicité des coefficients, on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout } j \in [\![0,k]\!], \text{ les coefficients de degré } j \text{ et } k+1-j \text{ de } P_k \text{ sont égaux.}}$$

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \neq 0$ (car $n \leqslant 2n$) et on a :

$$\left|\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}\right| = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}\frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \sim \frac{4n^2}{n^2} = 4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4.$$

Par la règle de d'Alembert pour les séries entières, on en déduit que :

$$\boxed{R = \frac{1}{4}.}$$

On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$(1+u)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}u^n.$$

Pour tout $x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$, comme $u = -4x \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-1)^n 2^{2n}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{n!}(-1)^n 2^{2n}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(2n-1)\times 2n}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(2n)!}{n!\times 2^n n!}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!^2}x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}[,\ \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n.}$$

Q15. On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Par le théorème de dérivation des séries entières, son rayon de convergence est le même que celui de la série entière $\sum\binom{2n}{n}x^n$ (obtenue par dérivation terme à terme) donc $R\left(\sum\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = R = \frac{1}{4}$, et en notant f sa somme, on a pour tout $x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Soit $x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$. En intégrant entre 0 et x, on obtient :

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-4t}}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-4t}\right]_0^x = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Comme de plus $f(0) = 0$, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.

Ainsi, en divisant par x, on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-R,R[\setminus\{0\},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.}$$

Q16. Par produit de Cauchy des séries entières $\sum\binom{2n}{n}x^n$ et $\sum\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}$ qui ont toutes les deux pour rayon de convergence $\frac{1}{4}$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|<\min(\frac{1}{4},\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n\right).$$

On en déduit par les deux questions précédentes que pour tout $x\in]-R,R[\setminus\{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\times\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right).$$

$$\boxed{\forall x\in]-R,R[\setminus\{0\},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right).}$$

Q17. D'après Q14, on a pour tout $x\in]-R,R[\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right) &= \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n\\ &= \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2(n+1)}{n+1}x^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}x^n.\end{aligned}$$

Par Q16, on en déduit que pour tout $x\in]-R,R[$ (vrai aussi en $x=0$, les deux membres valent 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}x^n.$$

Par unicité des cœfficients d'un développement en série entière, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}.}$$