

## CENTRALE. Option PC. Physique 1. 2023

## II Du casque goutte d'eau au casque flux d'air

Q27 Ecoulement irrotationnel:  $\vec{\nabla} \times \vec{v}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_e = \text{grad } \varphi$

Ecoulement incompressible:  $\text{div } \vec{v}_e = 0 \Rightarrow \text{div}(\text{grad } \varphi) = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0$

Q28  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x = \text{grad } \varphi \Rightarrow v_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Rightarrow \varphi = v_0 x$

Les surfaces équipotentiels sont les plans  $x = \text{cte}$ .

Les lignes de courant sont les droites parallèles à  $Ox$ .

Il y a orthogonalité entre les deux.

Q29 Loin en amont on a  $r \rightarrow +\infty$  donc:  $\varphi(r) \approx \delta r \cos \theta = \delta x$  car  $x = r \cos \theta$

Par identification avec le résultat de la question 28:  $\delta = v_0$

Q30  $v_{er} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \delta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta + \delta r \left(-\frac{2a^2}{r^3}\right) \cos \theta \Rightarrow v_{er} = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta$

$v_{e\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \delta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) (-\sin \theta) \Rightarrow v_{e\theta} = -v_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta$

Q31 Pour un écoulement parfait, le champ de vitesse doit être tangent à la surface d'une paroi fixe  $\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{m} = 0$  en un point de la paroi ( $\vec{m}$  = normale à la paroi)

$\Rightarrow \vec{v}_e(r=a) \cdot \vec{e}_n = 0$  ici

$\Rightarrow v_e(r=a) = 0$  ce qui est bien vérifié par  $v_{er}$

Q32 Equation de Navier-Stokes:  $\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \vec{v} + \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v}$

• Ecoulement stationnaire:  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

• Ecoulement irrotationnel:  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$

• Ecoulement parfait:  $\eta \Delta \vec{v} = \vec{0}$

• Pesanteur négligée:  $\rho \vec{g} = \vec{0}$

Il reste:  $\rho \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) = -\vec{\nabla} P \Rightarrow \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + P \right) = \vec{0} \quad \forall M$

D'où:  $\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{constante dans tout le fluide}$

Q33 Loin en amont et en aval les lignes de courant sont équidistantes  $\Rightarrow v_e = \text{cte}$   
 $\Rightarrow P_e$  uniforme

À gauche et à droite du cylindre: les lignes de courant s'écartent  $\Rightarrow v_e \downarrow$   
 $\Rightarrow P_e$  augmente

Au dessus ou en dessous du cylindre: les lignes de courant se rapprochent  $\Rightarrow v_e \uparrow$   
 $\Rightarrow P_e$  diminue



Q34 Equation de Navier-Stokes en négligeant la pesanteur et le gradient de pression :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = \eta \Delta \vec{v}$$

On a:  $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = (v_x' \frac{\partial}{\partial x'}) (v_x' (y', t) \vec{e}_{x'}) = \vec{0}$

Il reste, en projection selon  $\vec{e}_{x'}$ :  $\rho \frac{\partial v_x'}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2}$  ( $\frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2}$  négligé)

Donc:  $F = \frac{\partial}{\partial t}$   $G = \frac{\partial^2}{\partial y'^2}$  et  $D = \frac{\eta}{\rho}$  D est la viscosité cinématique

Q35 Temps caractéristique de convection:  $\tau_{\text{conv}} = \frac{L}{v_e}$

Temps caractéristique de diffusion:  $\tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{D} = \frac{L^2 \rho}{\eta}$

Nombre de Reynolds:  $Re = \frac{\rho v_e L}{\eta} = \frac{\rho L^2}{\eta} \frac{v_e}{L}$  donc:  $Re = \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}}$

Ecoulement laminaire si  $\tau_{\text{diff}} \ll \tau_{\text{conv}}$  La diffusion stabilisante est rapide

Ecoulement turbulent si  $\tau_{\text{diff}} \gg \tau_{\text{conv}}$  La convection déstabilisante est rapide

Q36 On prend maintenant:  $\tau_{\text{diff}} = \frac{\delta^2 \rho}{\eta}$

Donc:  $\tau_{\text{diff}} \approx \tau_{\text{conv}} \Rightarrow \frac{\delta^2 \rho}{\eta} \approx \frac{L}{v_e} \Rightarrow \delta^2 = \frac{\eta L}{\rho v_e} = \frac{\eta L^2}{\rho v_e L} = \frac{L^2}{Re}$

Soit:  $\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$

Q37 On prend  $L \sim 1 \text{ m}$ ,  $v_e \sim 10 \text{ m s}^{-1}$ ;  $\rho \sim 1 \text{ kg m}^{-3}$ ;  $\eta \sim 10^{-5} \text{ Pa s}$

$\Rightarrow \delta \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1 \cdot 10 \cdot 1}{10^{-5}}}} \sim 1 \text{ mm}$

Q38 hypothèse 1: on a bien  $\delta \ll L$

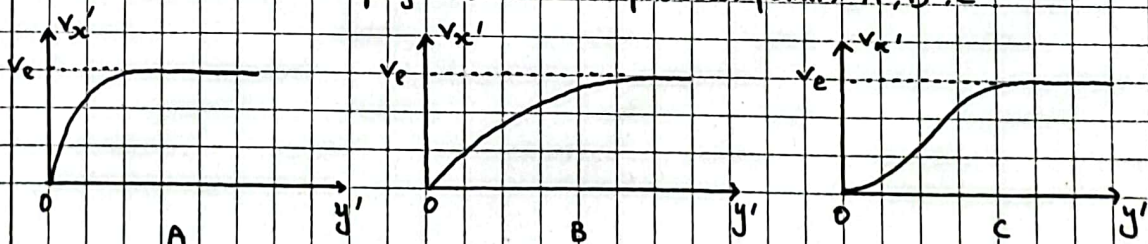
hypothèse 2:  $\left| \frac{v_y'}{v_x'} \right| \sim \frac{\delta}{L} \ll 1$  donc on a bien  $|v_y'| \ll |v_x'|$

hypothèse 3:  $\left| \frac{\partial v_x'}{\partial x'} \right| \sim \frac{v_e}{L} = \frac{\delta}{L} \ll 1$   $\left| \frac{\partial^2 v_x'}{\partial x'^2} \right| \sim \frac{v_e}{L^2} = \frac{\delta^2}{L^2} \ll 1$  vérifié

Q39 Equation de Navier-Stokes, sans pesanteur et en régime stationnaire, en projection selon Ox:

$0 = -\frac{\partial P}{\partial x'} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}$  valable aussi en  $x=0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x'}(y'=0) = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2}(0)$

Q40 On trace l'allure du profil des vitesses pour les points A, B, C.



A: la dérivée  $\frac{\partial v_x'}{\partial y'}$  diminue avec  $y' \Rightarrow \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2} < 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x'} < 0$

B: idem

C: la dérivée  $\frac{\partial v_x'}{\partial y'}$  croît avec  $y'$  jusqu'au point d'inflection  $\Rightarrow \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2} > 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x'} > 0$

La couche limite décolle si le fluide rencontre une pression de plus en plus forte donc si  $\frac{\partial P}{\partial x'} > 0$

Q41 De M à N les lignes de courant se rapprochent: la vitesse augmente et la pression diminue  $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x'} < 0$  Pas de décollement de la couche limite

De N à P les lignes de courant s'écartent: la vitesse diminue et la pression augmente  $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x'} > 0$  Décollement possible de la couche limite

Q42 Débit massique pour l'écoulement réel:  $D_m(x') = \int_0^{\delta(x')} \rho v dy' dz = \rho L_t \int_0^{\delta(x')} v dy'$

Débit massique pour l'écoulement parfait:  $D_m = \int_0^{\delta(x')} \rho v_e dy' dz = \rho L_t \int_0^{\delta(x')} v_e dy'$

$$\text{Donc: } \Delta D_m(x') = -D_m(x') + D_m \Rightarrow \rho L_t v_e \delta^*(x') = \rho L_t \left( \int_0^{\delta(x')} v dy' + \int_0^{\delta(x')} v_e dy' \right)$$

$$\Rightarrow \delta^*(x') = \frac{1}{v_e} \left( \int_0^{\delta(x')} v_e dy' - \int_0^{\delta(x')} v dy' \right)$$

$$\text{D'où: } \delta^*(x') = \int_0^{\delta(x')} \left( 1 - \frac{v}{v_e} \right) dy'$$

Q43 D'après la question précédente:  $D_m(x') = D_m - \Delta D_m(x')$

$$= \int_0^{\delta(x')} \rho v_e dy' dz - \rho L_t v_e \delta^*(x')$$

$$= \rho v_e L_t \delta(x') - \rho L_t v_e \delta^*(x')$$

$$\text{D'où: } D_m(x') = \rho L_t v_e (\delta(x') - \delta^*(x'))$$

Q44 Bilan de masse:  $dm_s = dm_e + dm_{e, \text{sup}}$

$$D_m(x' + dx') dt = D_m(x') dt + D'_{me} dt$$

$$\Rightarrow D'_{me} = D_m(x' + dx') - D_m(x') = \frac{dD_m}{dx'} dx'$$

$$\Rightarrow D'_{me} = \frac{d}{dx'} \left( \rho L_t v_e (x') (\delta(x') - \delta^*(x')) \right) \cdot dx'$$

Bilan de quantité de mouvement en projection selon Oxc:

$$\frac{dP(x' + dx')}{dt} - (dP(x') + dP_{\text{sup}}) = \underbrace{df_{\text{pression}}(x')}_{\text{force sur AB}} + \underbrace{df_{\text{pression}}(x' + dx')}_{\text{force sur CD}} + df_{P_{\text{sup}}}(x') + df$$

$$= p(x') \cdot \delta(x') L_t = -p(x' + dx') \delta(x' + dx') L_t$$



$$\frac{dP(x'+dx') - dP(x')}{dt} - \frac{dP_{\text{sup}}}{dt} = [p(x')\delta(x') - p(x'+dx')\delta(x'+dx')]L_t + dJ_{P_{\text{sup}}} + dJ$$

$$\frac{1}{dt} \frac{d}{dx'} (dP(x')) dx' - \frac{d m_{\text{sup}} v_e(x')}{dt} = - \frac{d}{dx'} (p(x')\delta(x')) dx' L_t + p(x') \frac{d\delta(x')}{dx'} L_t dx' - \tau_w L_t dx'$$

$$\frac{1}{dt} \frac{d}{dx'} (p v_e^2(x') L_t (\delta(x') - \delta^*(x') - \theta(x')) dx' - D'_{me} v_e(x')) \\ = - p(x') \frac{d\delta(x')}{dx'} dx' L_t - \delta(x') \frac{dP(x')}{dx'} dx' L_t + p(x') \frac{d\delta(x')}{dx'} L_t dx' - \tau_w L_t dx'$$

$$\frac{d}{dx'} (p v_e^2(x') L_t (\delta(x') - \delta^*(x') - \theta(x')) dx' - \frac{d}{dx'} (p L_t v_e(x') (\delta(x') - \delta^*(x')) dx' v_e(x')) \\ = - \delta(x') \frac{dP(x')}{dx'} dx' L_t - \tau_w L_t dx'$$

P reste:

$$\frac{d}{dx'} (p v_e^2(x') (\delta(x') - \delta^*(x') - \theta(x')) - v_e(x') \frac{d}{dx'} (p v_e(x') (\delta(x') - \delta^*(x')))) = - \delta(x') \frac{dP(x')}{dx'} - \tau_w$$

Q 45 On développe les dérivées de l'expression ci-dessus:

$$2p v_e(x') \frac{dv_e}{dx'} (\delta(x') - \delta^*(x') - \theta(x')) + p v_e^2(x') \left( \frac{d}{dx'} (\delta(x') - \delta^*(x')) - \frac{d\theta(x')}{dx'} \right) \\ - p v_e(x') \frac{dv_e}{dx'} (\delta(x') - \delta^*(x')) - p v_e^2(x') \frac{d}{dx'} (\delta(x') - \delta^*(x')) = - \delta(x') \frac{dP(x')}{dx'} - \tau_w$$

$$\Rightarrow p v_e(x') \frac{dv_e}{dx'} (\delta(x') - \delta^*(x')) - 2p v_e(x') \theta(x') \frac{dv_e}{dx'} - p v_e^2(x') \frac{d\theta}{dx'} = - \delta(x') \frac{dP(x')}{dx'} - \tau_w$$

Théorème de Bernoulli:  $\frac{P_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} = \text{cte} \Rightarrow \frac{dP_e}{dx'} = -\rho v_e(x') \frac{dv_e}{dx'}$

D'après l'indication avant la question 39:  $\frac{dP}{dx'} = \frac{dP_e}{dx'} = -\rho v_e(x') \frac{dv_e}{dx'}$

Donc:  $p v_e(x') \frac{dv_e}{dx'} (\delta(x') - \delta^*(x')) - 2p v_e(x') \theta(x') \frac{dv_e}{dx'} - p v_e^2(x') \frac{d\theta}{dx'} = p v_e(x') \frac{dv_e}{dx'} \delta(x') - \tau_w$

$$\Rightarrow p v_e(x') \frac{dv_e}{dx'} (-\delta^*(x') - 2\theta(x')) - p v_e^2(x') \frac{d\theta}{dx'} = -\tau_w$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\tau_w}{\rho v_e^2} = \frac{d\theta}{dx'} + \frac{1}{v_e} \frac{dv_e}{dx'} (\delta^* + 2\theta)}$$

Q 46 Décollement si  $\tau_w = 0 \Rightarrow S(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -0,082$

Si  $0 \leq \frac{x'}{L} \leq 0,1$ :  $\frac{d(v_e/v_0)}{d(x'/L)} = 19$  et  $Re\left(\frac{\theta}{L}\right)^2 \approx 0,0039$

on calcule  $\lambda = 0,0039 \cdot 19 = 0,07 \neq -0,082$

Donc on est dans le cas:  $0,1 \leq \frac{x'}{L} \leq 1$

# CENTRALE - Option PC - Physique 1 - 2023

On a alors:  $\lambda = 0,075 \left( \frac{49,522}{(2-x'/L)^6} - 1 \right) \cdot (-1) = -0,082$

$$\Rightarrow \frac{49,522}{(2-x'/L)^6} - 1 = 1,09$$

$$\Rightarrow (2 - \frac{x'}{L})^6 = 23,66$$

$$\Rightarrow \frac{x'}{L} \approx 0,3 \quad \text{Le décolllement se produit au tiers du dos du cycliste}$$

Q47. Grâce à ce casque, le sillage sera moins large donc il y aura moins de dissipation d'énergie.

Q48. En 2016:  $v = \frac{180.000}{4.3600 + 37.60 + 49} = 10,8 \text{ ms}^{-1}$

la puissance de la force de traînée est:  $P = \frac{1}{2} \rho S C_x v^3 = 192 \text{ W}$

En 2017:  $v = \frac{180.000}{4.3600 + 28.60 + 53} = 11,2 \text{ ms}^{-1}$

la puissance de la force de traînée est:  $P = 213 \text{ W}$

Il aurait donc dû fournir 21 W de plus, ce qui n'aurait pas été possible avec un casque profilé classique d'après la question 13.