ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Cours - Révisions PCSI

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I. Espaces préhilbertiens

A. Définitions

Définition 1

- Une *forme bilinéaire sur E* est une application Φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall (u,v,w) \in E^3,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\quad \begin{array}{ll} \Phi(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \Phi(u,w) + \mu \Phi(v,w) & \textit{(linéarité à gauche)} \\ \Phi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \Phi(u,v) + \mu \Phi(u,w) & \textit{(linéarité à droite)} \end{array}$$

- Φ est dite *symétrique* lorsque $\forall (u,v) \in E^2,\ \Phi(u,v) = \Phi(v,u)$
- Φ est dite *positive* lorsque $\forall u \in E,\ \Phi(u,u) \geqslant 0$
- Φ est dite *définie* lorsque $\forall u \in E,\ [\Phi(u,u) = 0 \ \Rightarrow\ u = 0_E]$

Notons que la linéarité à gauche et la symétrie impliquent la bilinéarité.

Définition 2

- On appelle *produit scalaire sur E* toute forme bilinéaire sur E, symétrique et définie positive.
- Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien*.

Lorsque Φ est un produit scalaire sur E, on note habituellement $\langle u,v \rangle$ le réel $\Phi(u,v)$.
On rencontre également les notations $(u\,|\,v)$ ou $u \cdot v$

Définition 3

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur E.
L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & \sqrt{\langle u,u \rangle} \end{array}$ est une norme sur E appelée la *norme euclidienne*.
On note alors pour tout $u \in E$, $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$.

Exemples fondamentaux :

Espace vectoriel	Produit scalaire	Norme euclidienne
$E = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$	$\lVert x \rVert = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
$E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$	$\lVert X \rVert = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^\top X}$
$E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ (a et b réels tels que $a < b$)	$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$	$\lVert f \rVert = \sqrt{\int_a^b f^2(t) \, \mathrm{d}t}$

Le premier/second produit scalaire est appelé *produit scalaire canonique* sur $\mathbb{R}^n / \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Pour $n = 2$, c'est celui que vous avez étudié au lycée dans le plan.

↪ *Exercice 1*

Dans toute la suite, $\langle \ , \ \rangle$ désigne un produit scalaire sur E et $\lVert . \rVert$ la norme euclidienne associée.

B. Propriétés calculatoires

Proposition 4

- *Généralisation de la bilinéarité :*
  Pour tout $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q) \in E^{p+q}$ et tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$, on a :
$$\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \mu_j \langle u_i, v_j \rangle$$
- On a pour tout $u \in E$, $\langle u, 0_E \rangle = \langle 0_E, u \rangle = 0$.
  Par suite :
$$\lVert u \rVert = 0 \Leftrightarrow u = 0_E.$$
- *Calculs avec la norme :*
  Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a : $\qquad \lVert \lambda u \rVert = |\lambda| \cdot \lVert u \rVert$
$$\lVert u + v \rVert^2 = \lVert u \rVert^2 + \lVert v \rVert^2 + 2 \langle u, v \rangle \quad \text{et} \quad \lVert u - v \rVert^2 = \lVert u \rVert^2 + \lVert v \rVert^2 - 2 \langle u, v \rangle$$
- *Formules de polarisation :*
  Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a :
$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \big(\lVert u + v \rVert^2 - \lVert u \rVert^2 - \lVert v \rVert^2 \big) \quad \text{et} \quad \langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \big(\lVert u + v \rVert^2 - \lVert u - v \rVert^2 \big)$$

Les formules de polarisation permettent de trouver le produit scalaire dont provient une norme euclidienne.

Théorème 5 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

- Pour tout $(u,v) \in E^2$, on a :
$$|\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|.$$
- De plus, l'égalité $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\cdot\|v\|$ est vérifiée si et seulement si u et v sont colinéaires.

- On rappelle que deux vecteurs u et v sont colinéaires lorsque $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$
ou de manière équivalente lorsque $u = 0_E$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$.

- L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas des exemples fondamentaux 1 et 3 s'écrit :

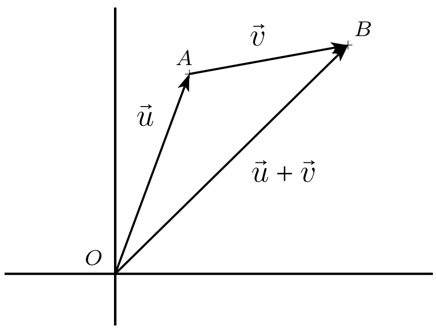
$$\forall (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

$$\forall (f,g) \in \left(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})\right)^2, \quad \left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Théorème 6 (*Inégalité triangulaire*)

- Pour tout $(u,v) \in E^2$, on a :
$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$
- De plus, l'égalité $\|u+v\| = \|u\|+\|v\|$ est vérifiée si et seulement si u et v sont colinéaires et orientés dans le même sens c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Illustration graphique dans le plan :
Le chemin direct est le plus court : $OB \leqslant OA + AB$.



$\hookrightarrow$ *Exercice 2*

C. Orthogonalité

1. Vecteurs orthogonaux

Définition 7

Soit u et v deux vecteurs de E.
On dit que u et v sont *orthogonaux* et on note $u \perp v$ lorsque $\langle u, v \rangle = 0$.

- Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même.
  Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E.
- L'orthogonalité dépend du produit scalaire.

Théorème 8 (*Théorème de Pythagore*)

Soit u et v deux vecteurs de E.
On a :

$$u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Illustration graphique dans le plan :
Le triangle OAB est rectangle en A si et seulement si $OB^2 = OA^2 + AB^2$.

2. Familles orthogonales / orthonormales

Définition 9

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

- La famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est dite *orthogonale* lorsque les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont deux à deux orthogonaux c'est-à-dire lorsque :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 \text{ avec } i \neq j,\ \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

- La famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est dite *orthonormale* ou *orthonormée* lorsqu'elle est orthogonale et composée de vecteurs de norme 1 c'est-à-dire lorsque :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2,\ \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Définition 10

Un vecteur u de E est dit *unitaire* ou *normé* lorsque $\|u\| = 1$.

- Si u un vecteur non nul de E alors le vecteur $\dfrac{1}{\|u\|}u$ est normé.
- Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul alors $\left(\dfrac{1}{\|u_1\|}u_1, \dots, \dfrac{1}{\|u_p\|}u_p\right)$ est orthonormale.

Théorème 11 (*Théorème de Pythagore*)

Si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille orthogonale alors :

$$\|u_1 + u_2 + \cdots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \cdots + \|u_p\|^2.$$

La réciproque est fausse si $p \geqslant 3$.

Proposition 12

Toute famille orthogonale de E ne contenant pas le vecteur nul est libre.

- En particulier, toute famille orthonormale est libre.
- Si E est un espace vectoriel de dimension n alors toute famille libre possède au plus n vecteurs. Par conséquent, toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul (en particulier toute famille orthornormale) possède au plus n vecteurs.

Théorème 13 (*Procédé d'orthonormalisation de Schmidt*)

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille libre de E.
On calcule successivement les vecteurs $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de la manière suivante :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \text{ et pour tout } k \in [\![2, p]\!],\ u'_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i \text{ puis } e_k = \frac{u'_k}{\|u'_k\|}.$$

Alors $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une famille orthonormée de E telle que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.

- Pour $p = 3$, les formules précédentes donnent :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$u'_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 \text{ puis } e_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|}$$

$$u'_3 = u_3 - \langle u_3, e_1 \rangle e_1 - \langle u_3, e_2 \rangle e_2 \text{ puis } e_3 = \frac{u'_3}{\|u'_3\|}$$

- On part d'une famille **libre** de E et on obtient concrètement une famille **orthonormée** qui possède le même nombre de vecteurs et qui engendre le même espace que la famille précédente.
- Notons que l'on applique ce procédé à une famille déjà orthonormée alors elle n'est pas modifiée.

↪ *Exercice 3*

3. Orthogonal d'un sous-espace

Définition 14

Soit X une partie de E.
On appelle *orthogonal de* X et on note $X^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de X c'est-à-dire :

$$X^\perp = \{u \in E / \ \forall v \in X, \ u \perp v\}.$$

Exemples :
On a $E^\perp = \{0_E\}$. En effet, le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est le vecteur nul.
On a $\{0_E\}^\perp = E$. En effet, tous les vecteurs de E sont orthogonaux au vecteur nul.

Proposition 15

Soit X une partie de E.

- $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $X^\perp = \big(\mathrm{Vect}(X)\big)^\perp$.

- Pour deux vecteurs u et v de E, on a l'équivalence :
$$u \perp v \iff u \in \{v\}^\perp \iff u \in \big(\mathrm{Vect}(v)\big)^\perp.$$
- On suppose que $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$. Soit $u \in E$.
Alors :
$$u \in F^\perp \iff u \in \{v_1, \dots, v_p\}^\perp \iff \forall i \in [\![1, p]\!], \ \langle u, v_i \rangle = 0.$$
- On a toujours $X \subset \big(X^\perp\big)^\perp$.

II. Espaces euclidiens

Définition 16

On appelle *espace euclidien* tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exemple : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, est un espace euclidien.

A. Bases orthonormées

Définition 17

Soit $\mathscr{B}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{B}$ est une *base orthonormée* ou *orthonormale* de E lorsque $\mathscr{B}$ est à la fois une base de E et une famille orthonormée.

Exemple : Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i le n-uplet dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. La base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique.

Proposition 18

On suppose que E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $\mathscr{B}$ est une famille orthonormée de E de cardinal n alors $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

Notons alors que dans l'algorithme de Gram-Schmidt, si l'on part d'une **base** de E alors on obtient une **base orthonormée** de E.

Théorème 19 (*Existence de bases orthonormées*)

Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

Théorème 20 (*Théorème de la base orthonormée incomplète*)

Toute famille orthonormée d'un espace euclidien E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Proposition 21 (*Calculs dans une base orthonormée*)

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit u et v deux vecteurs de E s'écrivant dans la base $\mathscr{B}$:

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \quad \text{avec } (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i = \langle u, e_i \rangle$.
- Le produit scalaire et la norme sont donnés par :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

En d'autres termes, si on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\langle u, v \rangle = (X|Y) \text{ si on note } (.|.) \text{ le produit scalaire canonique sur } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, lorsqu'on utilise les relations vectoriel/matriciel dans une base **orthonormée**, le produit scalaire sur E correspond au produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\hookrightarrow$ *Exercice 4*

B. Supplémentaire orthogonal

Théorème 22

Soit F un sous-espace vectoriel de E **de dimension finie**.
On a $F \oplus F^{\perp} = E$.
On dit que $F^{\perp}$ est *le supplémentaire orthogonal de F dans E*.

Corollaire 23

On suppose que E est un espace euclidien et F est un sous-espace vectoriel de E.
Alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$.

- On a dans ce cas $(F^{\perp})^{\perp} = F$ (car on a une inclusion et l'égalité des dimensions).
- Si H est un hyperplan d'un espace euclidien E alors $\dim(H^{\perp}) = 1$.
  On appelle *vecteur normal à H* tout vecteur u non nul de E, orthogonal à H.
  Dans ce cas, (u) est une base de $H^{\perp}$.

Corollaire 24

On suppose que E est un espace euclidien et F est un sous-espace vectoriel de E.
Toute famille obtenue en concaténant une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^{\perp}$ est une base orthonormée de E.

↪ *Exercice 5*

C. Projection orthogonale

Définition 25

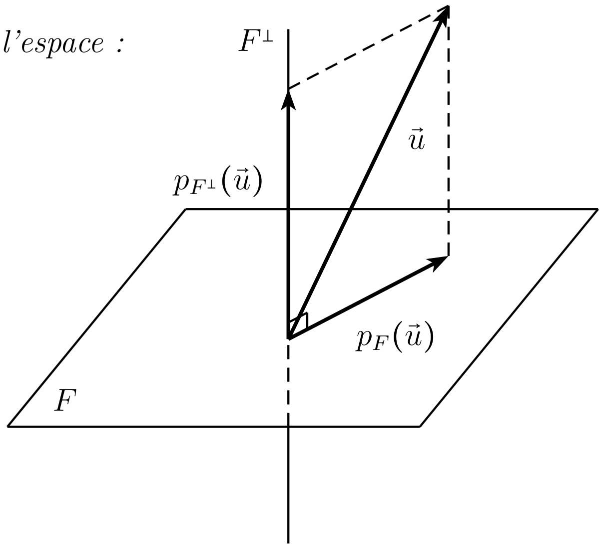
Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.
On appelle *projection orthogonale sur F* le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$ c'est-à-dire l'endomorphisme de E défini par :

$$p_F : \left\{ \begin{array}{ccc} E = F \oplus F^{\perp} & \longrightarrow & E \\ u = v + w & \longmapsto & v \end{array} \right. \quad \text{où } (v, w) \text{ est l'unique couple de } F \times F^{\perp} \text{ tel que } u = v + w.$$

Pour $u \in E$, on dit que $p_F(u)$ est *le projeté orthogonal de u sur F*.

La projection orthogonale sur $F^{\perp}$ est $p_{F^{\perp}} = Id_E - p_F$.

Illustration graphique dans l'espace :



Proposition 26 (*Calcul du projeté orthogonal*)

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie. Soit $u \in E$.

- Soit $v \in E$. On a l'équivalence :

$$v = p_F(u) \Leftrightarrow v \in F \text{ et } u - v \in F^\perp.$$

- Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F.
  On a $p_F(u) = \sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i \rangle e_i$.

Pour tout $u \in E$, on a $p_{F^\perp}(u) = (\mathrm{Id}_E - p_F)(u) = u - \sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i \rangle e_i$.
Dans le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on a pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:

$$u'_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i = p_{\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k-1})^\perp}(u_k)$$

car $(e_1, \dots, e_{k-1})$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$.
Ainsi, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt consiste à projeter le k-ème vecteur sur l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs déjà construits puis à normaliser.

Théorème 27 (*Minimisation de la norme*)

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie.
Soit $u \in E$. On a $\|u - p_F(u)\| = \min_{v \in F} \|u - v\|$.
De plus, $p_F(u)$ est le seul vecteur v_0 de F tel que $\|u - v_0\| = \min_{v \in F} \|u - v\|$.

Pour deux vecteurs u et v de E, le réel $\|u - v\|$ est la *distance entre u et v* .
Ainsi, on peut dire que $p_F(u)$ est le vecteur de F qui est à la distance la plus petite de u.

Définition 28

Soit $u \in E$. Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie.
On appelle *distance de u à F* et on note $d(u, F)$ le réel $d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\| = \|u - p_F(u)\|$.

Comme $u - p_F(u) \perp p_F(u)$, on a par le théorème de Pythagore :

$$\|u\|^2 = \|u - p_F(u)\|^2 + \|p_F(u)\|^2$$

d'où

$$\big(d(u,F)\big)^2 = \|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2.$$

$\hookrightarrow$ *Exercice 6*