ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Exercices - Révisions PCSI - Corrigé sur Hugoprépa

1 *Produits scalaires et normes euclidiennes*

Montrer que les applications suivantes définissent un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et donner l'expression générale de la norme euclidienne associée.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
   Pour tout $(A, B) \in E^2$, $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^\intercal B)$.

2. $E = \mathbb{R}_n[X]$
   Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.
   Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\psi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$.

3. $E = \mathbb{R}[X]$
   Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

2 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

1. Prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le cas d'égalité (on pourra s'aider du cours de PCSI).

2. *Application 1 :* Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   On suppose que $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
   En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, montrer que $|E(X)| \leqslant \sqrt{E(X^2)}$.
   Retrouver ce résultat en utilisant la variance de X.

3. *Application 2 :* Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.
   À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\big(f(x)\big)^2 \leqslant x \displaystyle\int_0^x \big(f'(t)\big)^2 \mathrm{d}t$.
   En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \big(f'(t)\big)^2 \mathrm{d}t$.

3 *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

On se place sur $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
Soit $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$ et $u_3 = (1,1,-1)$.
Orthonormaliser la famille (u_1, u_2, u_3) à l'aide du procédé de Gram-Schmidt (après avoir justifié qu'elle vérifie l'hypothèse nécessaire).
Justifier que la famille obtenue est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire à la fois une base de $\mathbb{R}^3$ et une famille orthonormée).

$\boxed{4}$ *Bases orthonormées*

On se propose, dans cet exercice, de démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.
Soit n un entier naturel et a un réel.
On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a).$$

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $P_i = (X-a)^i$.
   Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale de E.

2. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, calculer $\|P_i\|$. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.

3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base $\mathscr{B}$, à l'aide des dérivées successives de P en a.
   En déduire la formule de Taylor pour les polynômes c'est-à-dire :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

$\boxed{5}$ *Supplémentaire orthogonal*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ (A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B).$$

On note $\mathscr{S}_n$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n$ celui de matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n \subset \left(\mathscr{A}_n\right)^\perp$.

2. Montrer que $\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. En déduire que $\mathscr{S}_n = \left(\mathscr{A}_n\right)^\perp$.

$\boxed{6}$ *Projection orthogonale*

On souhaite déterminer l'existence et la valeur de $\Delta = \min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$.

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\Delta = \left(d(X^2, F)\right)^2$ où $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.

2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur F de deux façons :

   - en utilisant la caractérisation du projeté orthogonal (*Proposition 26*, premier point)
   - en orthonormalisant une base de F (*Proposition 26*, deuxième point).

3. En déduire la valeur de Δ.