ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Corrigé des exercices - Révisions PCSI

Exercice 1 : Produits scalaires et normes euclidiennes

1. $\boxed{E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et pour tout } (A,B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ \varphi(A,B) = \mathrm{tr}(A^\top B).}$

En notant $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a :

$$\varphi(A,B) = \sum_{j=1}^{n}[A^\top B]_{j,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[A^\top]_{j,i}b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}b_{i,j}.$$

⋄ φ définit bien une application de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
⋄ Soit $(A,B,C) \in E^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a par linéarité de la trace $(*)$:

$$\varphi(A,\lambda B + C) = \mathrm{tr}(A^\top(\lambda B + C)) = \mathrm{tr}(\lambda\, A^\top B +\ A^\top C) \overset{(*)}{=} \lambda \mathrm{tr}(A^\top B) + \mathrm{tr}(A^\top C) = \lambda\varphi(A,B) + \varphi(A,C).$$

⋄ Soit $(A,B) \in E^2$.
Il est clair que $\varphi(B,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \varphi(A,B)$.
⋄ Soit $A \in E$. On a $\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2$.
Il s'agit d'une somme de termes positifs donc on a $\varphi(A,A) \geqslant 0$.
⋄ Soit $A \in E$. On suppose que $\varphi(A,A) = 0$ c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2 = 0$.
Il s'agit d'une somme de termes positifs. Or, une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls.
On en déduit que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}^2 = 0$ d'où $a_{i,j} = 0$.
Ainsi, $A = 0_n$.
Les points précédents prouvent que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.
Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c}\varphi \text{ définit un produit scalaire sur } E \text{ et la norme euclidienne associée est donnée par :}\\ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\top A)} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2}\end{array}}$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. $\boxed{E = \mathbb{R}_n[X] \text{ et pour tout } (P,Q) \in \left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2,\ \psi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a).}$

⋄ ψ définit bien une application de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
⋄ Soit $(P,Q,R) \in E^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a par linéarité de la dérivation puis de la somme :

$$\begin{aligned}\psi(P,\lambda Q + R) &= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)(\lambda Q + R)^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)(\lambda Q^{(k)}(a) + R^{(k)}(a))\\ &= \sum_{k=0}^{n}(\lambda P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a) + P^{(k)}(a)R^{(k)}(a)) = \lambda\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)R^{(k)}(a)\\ &= \lambda\psi(P,Q) + \psi(P,R).\end{aligned}$$

◇ Soit $(P,Q) \in E^2$.
Il est clair que $\psi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(a)P^{(k)}(a) = \psi(Q,P)$.
◇ Soit $P \in E$. On a $\psi(P,P) = \sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}(a)\right)^2$.
Il s'agit d'une somme de termes positifs donc on a $\psi(P,P) \geqslant 0$.
◇ Soit $P \in E$. On suppose que $\psi(P,P) = 0$ c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}(a)\right)^2 = 0$.
Il s'agit d'une somme de termes positifs. Or, une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls.
On en déduit que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\left(P^{(k)}(a)\right)^2 = 0$ d'où $P^{(k)}(a) = 0$.
Ainsi, a est une racine de P de multiplicité supérieure ou égale à $n+1$. Comme P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, on en déduit que c'est le polynôme nul : $P = 0_E$.
Les points précédents prouvent que ψ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.
Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c}\psi \text{ définit un produit scalaire sur } E \text{ et la norme euclidienne associée est donnée par :}\\ \forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \|P\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}(a)\right)^2}.\end{array}}$$

3. $\boxed{E = \mathbb{R}[X] \text{ et pour tout } (P,Q) \in \left(\mathbb{R}[X]\right)^2,\ \langle P|Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t.}$
◇ Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$. La fonction $f : t \mapsto P(t)Q(t)\exp(-t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ par produit.
Comme PQ est un polynôme, on peut l'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \in \mathbb{N}$, $(a_0,\dots,a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$.
On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $t^2 f(t) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^{2+k} e^{-t}$.
Pour tout $k \in [\![0,d]\!]$, $\lim_{t\to+\infty} t^{2+k}e^{-t} = 0$ (par croissances comparées) donc, par combinaison linéaire, $\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$ donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$.
On a pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t^2} \geqslant 0$ et comme $2 > 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.
On en conclut par comparaison que l'intégrale définissant $\langle P|Q\rangle$ est convergente.
Notons $\varphi : (P,Q) \mapsto \langle P|Q\rangle$.
◇ Pour $(P_1,P_2,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité d'intégrales généralisées toutes convergentes, $\varphi(P_1+\lambda P_2,Q) = \varphi(P_1,Q) + \lambda\varphi(P_2,Q)$.
Ainsi, φ est linéaire à gauche.
◇ Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$.
Ainsi, φ est symétrique et étant linéaire à gauche, c'est donc une forme bilinéaire et symétrique.
◇ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $\varphi(P,P) = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t}dt$.
Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $P(t)^2e^{-t} \geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale $(0 \leqslant +\infty)$, $\varphi(P,P) \geqslant 0$.
◇ On suppose $\varphi(P,P) = 0$. On a donc $\int_0^{+\infty} P(t)^2e^{-t}dt = 0$.
Comme $t \mapsto P(t)^2e^{-t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P(t)^2 \underbrace{e^{-t}}_{\neq 0} = 0$ d'où $P(t) = 0$.
Le polynôme P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul.
Par conséquent, φ est définie positive.

Ainsi :

$\langle .|. \rangle$ définit un produit scalaire sur E et la norme euclidienne associée est donnée par :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2 e^{-t} \mathrm{d}t}.$$

Exercice 2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz
1. *Énoncé du théorème :*

- Pour tout $(u,v) \in E^2$, on a $|\langle u,v \rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$.
- De plus, l'égalité $|\langle u,v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ est vérifiée si et seulement si u et v sont colinéaires.

Preuve du théorème : Soit $(u,v) \in E^2$.

1er cas : On suppose que $u = 0_E$.
On a alors $| < u,v > | = |0| = 0$ et $\|u\|.\|v\| = 0.\|v\| = 0$.
On a donc bien $| < u,v > | \leqslant \|u\|.\|v\|$.
Remarquons qu'il y a même égalité et dans ce cas, u et v sont colinéaires.

2ème cas : On suppose que $u \neq 0_E$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\|xu+v\|^2 = \|xu\|^2 + \|v\|^2 + 2 < xu,v >= \big(|x|.\|u\|\big)^2 + \|v\|^2 + 2x < u,v >= \|u\|^2 x^2 + 2 < u,v > x + \|v\|^2.$$

Comme $u \neq 0$, on a $\|u\|^2 \neq 0$.
Ainsi, la fonction $\varphi : x \mapsto \|u\|^2 x^2 + 2 < u,v > x + \|v\|^2$ est un trinôme du second degré.
Notons Δ son discriminant. On a :

$$\Delta = \big(2 < u,v >\big)^2 - 4\|u\|^2.\|v\|^2 = 4\big((< u,v >)^2 - \|u\|^2\|v\|^2\big).$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \|xu+v\|^2 \geqslant 0$, on a nécessairement $\Delta \leqslant 0$ (car si on avait $\Delta > 0$, la fonction φ prendrait des valeurs strictement négatives entre ses deux racines).
On en déduit $(< u,v >)^2 \leqslant \|u\|^2.\|v\|^2$ et donc par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$:

$$| < u,v > | \leqslant \|u\|.\|v\|$$

Étudions le cas d'égalité. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
| < u,v > | = \|u\|.\|v\| &\iff \Delta = 0 \\
&\underset{\text{car } \Delta \leqslant 0}{\iff} \exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \varphi(x_0) = 0 \\
&\iff \exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \|x_0 u + v\|^2 = 0 \\
&\iff \exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } x_0 u + v = 0_E \\
&\underset{\alpha = -x_0}{\iff} \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } v = \alpha u \\
&\underset{u \neq 0_E}{\iff} u \text{ et } v \text{ sont colinéaires}
\end{aligned}$$

2. *Application 1 :* Notons $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Comme $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, X et X^2 sont d'espérance finie et on a $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$ et $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 P(X = x_k)$ par le théorème du transfert.
On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $a = (x_1\sqrt{P(X = x_1)}, \dots, x_n\sqrt{P(X = x_n)})$ et $b = (\sqrt{P(X = x_1)}, \dots, \sqrt{P(X = x_n)})$, on a :

$$|<a,b>| \leqslant \|a\| \cdot \|b\| \Leftrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\sqrt{P(X = x_k)}\sqrt{P(X = x_k)}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k\sqrt{P(X = x_k)})^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{P(X = x_k)})^2}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 P(X = x_k)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k)}.$$

Or, comme $([X = x_k])_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements, on a $\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = 1$.

On en déduit que :

$$\boxed{|E(X)| \leqslant \sqrt{E(X^2)}.}$$

NB : On pouvait aussi utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui sera vue dans le cours sur les variables aléatoires avec les variables X et $Y = 1$ (car X^2 et Y^2 sont d'espérance finie).
On obtient $(E(X))^2 \leqslant E(X^2)$ d'où le résultat par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Autre méthode en utilisant la variance :
Comme X^2 est d'espérance finie, X admet une variance et on a par positivité de l'espérance,

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \geqslant 0.$$

Par la formule d'Huygens, on en déduit :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \geqslant 0 \text{ d'où } E(X^2) \geqslant \big(E(X)\big)^2.$$

On conclut comme précédemment.

3. *Application 2 :* Soit $x \in [0,1]$.
Comme $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$, on a $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$.
On se place dans $\mathscr{C}([0,x],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $<\varphi,\psi> = \int_0^x \varphi(t)\psi(t)\mathrm{d}t$.
En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $\varphi : t \mapsto 1$ et $\psi : t \mapsto f'(t)$, on a :

$$|<\varphi,\psi>| \leqslant \|\varphi\|.\|\psi\| \Leftrightarrow \left|\int_0^x 1 \times f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_0^x 1^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^x (f'(t))^2\mathrm{d}t}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| \leqslant \sqrt{x}\sqrt{\int_0^x (f'(t))^2\mathrm{d}t}.$$

Par croissance de la fonction $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$\boxed{(f(x))^2 \leqslant x\int_0^x (f'(t))^2\mathrm{d}t.}$$

Soit $x \in [0,1]$. Comme pour tout $t \in [0,1]$, $(f'(t))^2 \geqslant 0$, on a $\int_0^x (f'(t))^2\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t$.
En effet, par la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale ($x \leqslant 1$), on a :

$$\int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t - \int_0^x (f'(t))^2\mathrm{d}t = \int_x^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Comme $x \geqslant 0$, on en déduit que $(f(x))^2 \leqslant x\int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t$.
Par croissance et linéarité de l'intégrale ($0 \leqslant 1$ et intégrales de fonctions continues sur un segment), on obtient :

$$\int_0^1 (f(x))^2\,dx \leqslant \int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t \cdot \int_0^1 x\mathrm{d}x.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$, on en déduit le résultat souhaité :

$$\boxed{\int_0^1 (f(x))^2\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2\mathrm{d}t.}$$

Exercice 3 : Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

On commence par vérifier que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.
Calculons le déterminant de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient une matrice triangulaire.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre. Orthonormalisons-la à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.
◇ On a $\|u_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.
On pose alors $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
◇ On calcule $u_2' = u_2 - < u_2, e_1 > e_1$.

$$\begin{aligned} u_2' &= (1,-1,1) - \frac{1}{3} < (1,-1,1),(1,1,1) > (1,1,1) \\ &= (1,-1,1) - \frac{1}{3}(1\times 1 + (-1)\times 1 + 1\times 1)(1,1,1) \\ &= (1,-1,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \frac{2}{3}(1,-2,1). \end{aligned}$$

On a $\|u_2'\| = \dfrac{2}{3}\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.
On pose alors $e_2 = \dfrac{u_2'}{\|u_2'\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{-2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
◇ On calcule $u_3' = u_3 - < u_3, e_1 > e_1 - < u_3, e_2 > e_2$.

$$\begin{aligned} u_3' &= (1,1,-1) - \frac{1}{3} < (1,1,-1),(1,1,1) > (1,1,1) - \frac{1}{6} < (1,1,-1),(1,-2,1) > (1,-2,1) \\ &= (1,1,-1) - \frac{1}{3}\times 1\times (1,1,1) - \frac{1}{6}\times(-2)(1,-2,1) \\ &= (1,1,-1) - \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(1,-2,1) = (1,0,-1). \end{aligned}$$

On a $\|u_3'\| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.
On pose alors $e_3 = \dfrac{u_3'}{\|u_3'\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
On a donc :

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1).}$$

D'après le procédé de Gram-Schmidt, la famille (e_1, e_2, e_3) est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
Elle est donc libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^3.}$$

Exercice 4 : Bases orthonormées
1. Remarquons tout d'abord que $(P_0, \dots, P_n)$ est bien une famille de E car pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, P_i

est un polynôme de degré i donc $P_i \in \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Montrons que $< P_i, P_j >= 0$.
On a $< P_i, P_j >= \sum_{k=0}^{n} P_i^{(k)}(a) P_j^{(k)}(a)$.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
Comme $P_i^{(k)}(X) = \begin{cases} i(i-1)\dots(i-k+1)(X-a)^{i-k} & \text{si } k \leqslant i \\ 0 & \text{si } k > i, \end{cases}$ on obtient en évaluant en a :

$$P_i^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ i! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k > i \end{cases} = \begin{cases} i! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, $P_j^{(k)}(a) = \begin{cases} j! & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Comme $i \neq j$, on en déduit que $P_i^{(k)}(a) P_j^{(k)}(a) = \begin{cases} 0 \times 0 & \text{si } k \notin \{i,j\} \\ i! \times 0 & \text{si } k = i \\ 0 \times j! & \text{si } k = j \end{cases} = 0.$

Ainsi, $< P_i, P_j >= \sum_{k=0}^{n} 0 = 0$.
Donc :

$$\boxed{\text{la famille } (P_0, \dots, P_n) \text{ est une famille orthogonale de } E.}$$

2. Soit $i \in [\![0,n]\!]$.
On a :

$$\|P_i\| = \sqrt{< P_i, P_i >} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} \left(P_i^{(k)}(a)\right)^2} = \sqrt{(i!)^2} = |i!| = i!$$

car on a vu que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_i^{(k)}(a) = \begin{cases} i! & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ \|P_i\| = i!.}$$

Par suite, la famille $\left(\frac{P_0}{0!}, \frac{P_1}{1!}, \dots, \frac{P_n}{n!}\right)$ est une famille orthonormée de E (car c'est une famille orthogonale de E et tous ses vecteurs sont de norme 1).
C'est donc en particulier une famille libre de E et elle est de cardinal $n+1 = \dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$ donc c'est une base de E.
Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{B} = \left(\frac{P_0}{0!}, \frac{P_1}{1!}, \dots, \frac{P_n}{n!}\right) \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

3. Soit $P \in E$.
Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{P_k}{k!}$ avec pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\alpha_k =< P, \frac{P_k}{k!} >= \frac{1}{k!} < P, P_k >= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(a) P_k^{(i)}(a).$$

Comme pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P_k^{(i)}(a) = \begin{cases} k! & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on en déduit que $\alpha_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) \times k! = P^{(k)}(a)$.
On obtient donc la formule de Taylor pour les polynômes :

$$\boxed{\text{pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{P_k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.}$$

Exercice 5 :
1. Montrons l'inclusion $\mathscr{S}_n \subset \left(\mathscr{A}_n\right)^{\perp}$.
Soit $M \in \mathscr{S}_n$ et $N \in \mathscr{A}_n$.
On a :

$$(M|N) = \mathrm{tr}(M^{\top}N) = \mathrm{tr}(MN) \text{ car } M^{\top} = M.$$

On a également par symétrie du produit scalaire :

$$(M|N) = (N|M) = \mathrm{tr}(N^{\top}M) = \mathrm{tr}(-NM) = -\mathrm{tr}(NM) = -\mathrm{tr}(MN)$$

car $N^{\top} = -N$ et par les propriétés de la trace.
Ainsi, $(M|N) = \mathrm{tr}(MN) = -\mathrm{tr}(MN)$ d'où $(M|N) = 0$.
On a ainsi prouvé que si $M \in \mathscr{S}_n$ alors M est orthogonal à tous les éléments de $\mathscr{A}_n$.
On en déduit que $\boxed{\mathscr{S}_n \subset \left(\mathscr{A}_n\right)^{\perp}}$.
2. ⋆ Soit $M \in \mathscr{S}_n \cap \mathscr{A}_n$.
On a $M^{\top} = M$ car $M \in \mathscr{S}_n$ et $M^{\top} = -M$ car $M \in \mathscr{A}_n$ d'où $M = -M$ donc $M = 0_n$.
On en déduit que les sous-espaces vectoriels $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont en somme directe.
⋆ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
En posant $M = \dfrac{A + A^{\top}}{2}$ et $N = \dfrac{A - A^{\top}}{2}$, on a $A = M + N$ avec :

$$M^{\top} = \frac{A^{\top} + A}{2} = M \text{ donc } M \in \mathscr{S}_n \quad \text{et} \quad N^{\top} = \frac{A^{\top} - A}{2} = -N \text{ donc } N \in \mathscr{A}_n.$$

On en déduit que $A \in \mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$.
On a donc prouvé l'inclusion $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$.
L'inclusion réciproque étant évidente, on en déduit que $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n}$.
3. On a déjà prouvé que $\mathscr{S}_n \subset \left(\mathscr{A}_n\right)^{\perp}$.
De plus, comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$, on a $\dim\left(\mathscr{S}_n\right) + \dim\left(\mathscr{A}_n\right) = n^2$.
Ainsi, $\dim\left(\mathscr{S}_n\right) = n^2 - \dim\left(\mathscr{A}_n\right) = \dim\left((\mathscr{A}_n)^{\perp}\right)$ car $\mathscr{A}_n \oplus \left(\mathscr{A}_n\right)^{\perp} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($\mathscr{M}_n$ est de dimension finie).
On en déduit que $\boxed{\mathscr{S}_n = \left(\mathscr{A}_n\right)^{\perp}}$.

Exercice 6 :
1. Précisons les notations.
X désigne la fonction $t \mapsto t$, X^2 désigne la fonction $t \mapsto t^2$ et 1 est la fonction constante égale à 1.
$d(X^2, F)$ désigne la distance de X^2 au sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.
Comme F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, on a par définition :

$$\left(d(X^2,F)\right)^2 = \left(\min_{P\in F} \|X^2 - P\|\right)^2 = \left(\min_{P\in F} \sqrt{\int_0^1 (t^2 - P(t))^2 \,\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Comme $x \mapsto x^2$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$\left(d(X^2,F)\right)^2 = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t = \Delta.$$

L'existence de Δ est ainsi garantie et on a :

$$\boxed{\Delta = \left(d(X^2,F)\right)^2.}$$

2. Comme F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, le projeté orthogonal de X^2 sur F est bien défini. Déterminons $p_F(X^2)$.
⋆ *Méthode 1 : en utilisant la caractérisation du projeté orthogonal*

Soit $P \in E$.

$$\begin{aligned}
P = p_F(X^2) &\Leftrightarrow P \in F \text{ et } X^2 - P \in F^\perp \\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } P = aX + b \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} < X^2 - P, 1 >= 0 \\ < X^2 - P, X >= 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } P = aX + b \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} < X^2 - aX - b, 1 >= 0 \\ < X^2 - aX - b, X >= 0. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} < X^2 - aX - b, 1 >= 0 \\ < X^2 - aX - b, X >= 0 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)\mathrm{d}t = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)t\mathrm{d}t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2 - bt\right]_0^1 = 0 \\ \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{a}{3}t^3 - \frac{b}{2}t^2\right]_0^1 = 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a + 6b = 2 \\ 4a + 6b = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -\frac{1}{6}. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}}$.

⋆ *Méthode 2 : en orthonormalisant une base de F*

On a $F = \mathrm{Vect}(1, X)$ et $(1, X)$ est une famille libre donc $(1, X)$ est une base de F.
Orthonormalisons la famille $(1, X)$.
On a $\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1^2 \mathrm{d}t} = 1$ donc on pose $P_1 = 1$.
Calculons $X - < X, P_1 > P_1 = X - \left(\int_0^1 t\mathrm{d}t\right).1 = X - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = X - \frac{1}{2}$
et $\|X - \frac{1}{2}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t} = \sqrt{\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t} = \sqrt{\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
On pose alors $P_2 = \dfrac{X - \frac{1}{2}}{\|X - \frac{1}{2}\|} = 2\sqrt{3}X - \sqrt{3}$.
Ainsi, $(P_1, P_2) = (1, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3})$ est une base orthonormée de F.
On a alors :

$$\begin{aligned}
p_F(X^2) &=< X^2, 1 > .1+ < X^2, 2\sqrt{3}X - \sqrt{3} > .(2\sqrt{3}X - \sqrt{3}) \\
&= \left(\int_0^1 t^2\mathrm{d}t\right).1 + (2\sqrt{3})^2\left(\int_0^1 t^2\left(t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t\right)\left(X - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 + 12\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3\right]_0^1\left(X - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3} + 12\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3} + X - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}}$.

3. On a $d(X^2, F) = \|X^2 - p_F(X^2)\| = \|X^2 - X + \frac{1}{6}\|$.
On a donc :

$$\Delta = \|X^2 - p_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|p_F(X^2)\|^2$$

d'après le théorème de Pythagore ($X^2 - p_F(X^2) \perp p_F(X^2)$ puisque $X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp$ et $p_F(X^2) \in F$).
Or, $\|X^2\|^2 = \int_0^1 t^4\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}$ et $\|p_F(X^2)\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{36}t\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$.

Ainsi, $\Delta = \dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{36}$ donc :

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{180}.}$$