DM8 (Séries entières - Intégration)
Corrigé

I. Problème 1 : type CCINP

A. Intégrales de Wallis

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale « ordinaire ». La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.

1. On a $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(t)\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1$.

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est positive et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et elle n'est pas identiquement nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car par exemple, $\sin^n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$.
On en déduit (on a bien $0 < \frac{\pi}{2}$) :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ W_n > 0.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme les fonctions $t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on obtient par intégration par parties :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1}(t)\times\sin(t))\mathrm{d}t = [\sin^{n+1}(t)\times(-\cos(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin^n(t)\cos(t)\times(-\cos(t))\mathrm{d}t$$

Or, $\sin^{n+1}(0) = 0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{d}(t) = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1-\sin^2(t))\mathrm{d}x \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}(t) - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\mathrm{d}(t) = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

On en dé duit que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ ou encore que :

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$.
Initialisation : On a $(0+1)W_{0+1}W_0 = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$. Montrons qu'alors $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
On a $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ d'après Q3 d'où $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ par hypothèse de récurrence.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ donc $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$.
Par croissance de l'intégrale, on obtient alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$ c'est-à-dire $W_{n+1} \leqslant W_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc décroissante.}}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par Q5, on a :

$$W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$$

donc par Q2 et Q3 :

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$.
Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$ d'où :

$$\boxed{W_{n+1} \sim W_n.}$$

7. On a par Q3, $\frac{\pi}{2} = (n+1)W_{n+1}W_n \sim nW_n^2$ donc $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ d'où $|W_n| \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geqslant 0$, on a $|W_n| = W_n$ donc :

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $\varphi(u) = \frac{\pi}{2} - u$.
La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
On peut donc poser $t = \frac{\pi}{2} - u$. On a $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u = -\mathrm{d}u$.
On a $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$.
D'après le théorème de changement de variable, on obtient :

$$W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)\mathrm{d}u.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t.}$$

9. Par Q3, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.
En itérant cette formule, on a :

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2}W_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

car

$$(2n)(2n-2) \times \cdots \times 2 = \prod_{k=1}^{n}(2k) = \left(\prod_{k=1}^{n} 2\right)\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = 2^n n!$$

et

$$(2n-1)(2n-3) \times \cdots \times 1 = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{(2n)(2n-2) \times \cdots \times 2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

On peut prouver plus rigoureusement ce résultat par une récurrence.
Initialisation : On a $\frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_{2\times 0}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
On a alors

$$\begin{aligned} W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} &\overset{H.R}{=} \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{2n+2}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^2(n+1)^2 2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}. \end{aligned}$$

Donc on a bien :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}}.$$

Par Q4, on a alors :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{(2n+1)W_{2n}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\ .}$$

B. Intégrales de Gauss

10. La fonction $x \mapsto e^{-nx^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}t$ (licite car changement de variable affine avec $dx = \dfrac{1}{\sqrt{n}}dt$, et pour les bornes, comme $t = \sqrt{n}x$, il suffit de calculer $\sqrt{n} \times 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{n}x = +\infty$), on obtient que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et de même valeur en cas de convergence.
Comme on a admis que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on obtient par linéarité que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t$ converge également et on a de plus :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient ainsi que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge et } \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.}$$

11. Notons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$ est une intégrale « ordinaire » car la fonction $x \mapsto (1-x^2)^n$ est continue sur le segment $[0, 1]$.
En utilisant le changement de variable $x = \sin(t)$ (licite car $t \mapsto \sin(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, avec $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $dx = \cos(t)dt$), on obtient :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))^n\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = W_{2n+1}.}$$

12. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Avec le changement de variable $x = \tan(t)$ (licite car $t \mapsto \tan(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, \pi/2[$, avec $\tan(0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to \pi/2^-} \tan(t) = +\infty$ et $dx = \dfrac{1}{\cos^2(t)}dt$), on obtient que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$

et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^n}\frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence de même valeur.
Or, pour tout $t \in [0, \pi/2[$, on a :

$$\frac{1}{(1+\tan^2(t))^n}\frac{1}{\cos^2(t)} = (\cos^2(t))^n \frac{1}{\cos^2(t)} = (\cos(t))^{2n-2}.$$

La fonction $t \mapsto (\cos(t))^{2n-2}$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^n}\frac{1}{\cos^2(t)}\mathrm{d}t$ converge.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = W_{2n-2}.}$$

13. La fonction exponentielle est convexe (car elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde positive) donc sa courbe représentative se situe au-dessus de sa tangente en 0 qui a pour équation $y = x + 1$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout réel } u, \text{ on a } \mathrm{e}^u \geqslant 1 + u.}$$

14. Soit $u \in \mathbb{R}$.
D'après la question 13 appliquée en $-u$, on a pour $u \leqslant 1$:

$$0 \leqslant 1 - u \leqslant \mathrm{e}^{-u} \quad \text{donc} \quad (1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu}$$

par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$.
D'après la question 13 appliquée en u, on a pour $u > -1$:

$$0 < 1 + u \leqslant \mathrm{e}^{u} \quad \text{donc} \quad \mathrm{e}^{-nu} \leqslant \frac{1}{(1+u)^n}$$

par décroissance de la fonction $x \mapsto x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu} & \text{si } u \leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-nu} \leqslant \dfrac{1}{(1+u)^n} & \text{si } u > -1. \end{array}}$$

15. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $u = x^2 \leqslant 1$ donc d'après la question 14, $(1-x^2)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nx^2}$.
Par croissance de l'intégrale $(0 \leqslant 1)$, on en déduit que :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{puis} \quad \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$$

(par positivité de l'intégrale (convergente) car pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\exp(-nx^2) \geqslant 0$).
Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $u = x^2 > -1$, donc d'après la question 14, $\mathrm{e}^{-nx^2} \leqslant \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ donc par croissance de l'intégrale (les deux intégrales en jeu convergent) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.}$$

16. En utilisant les questions 10, 11 et 12, les inégalités obtenues en question 15 deviennent :

$$W_{2n+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant W_{2n-2}.$$

D'après Q7, $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc $W_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ (suite extraite) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n+1} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n-2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Par passage à la limite dans les inégalités ci-dessus après multiplication par $\sqrt{n}$, on obtient :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

17. Soit $a \in]0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{a}t$ (licite car changement de variable affine) dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$, on obtient que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\sqrt{a}\, \mathrm{d}t$ converge et a même valeur.
Comme $\sqrt{a} \neq 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t$ converge et on a par linéarité :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\sqrt{a}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De plus, comme la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est paire, par le changement de variable $u = -t$, on obtient que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t$, elle est donc convergente, et elle a la même valeur.
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\, \mathrm{d}t \text{ converge et a pour valeur } \sqrt{\frac{\pi}{a}}.}$$

II. Problème 2 : type Centrale/Mines - *Source : Centrale PC 2019*

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

I.A - Dérivées successives

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, et on a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\cos x)^2 + \sin(x)(\sin(x)+1)}{(\cos x)^2} = \frac{1+\sin x}{(\cos x)^2},\\
f''(x) &= \frac{(\cos x)^3 + 2\sin x\cos x(1+\sin x)}{(\cos x)^4} = \frac{(\cos x)^2 + 2\sin x + 2(\sin x)^2}{(\cos x)^3}\\
&= \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3}\\
\text{et } f^{(3)}(x) &= \frac{(2\cos x\sin x + 2\cos x)(\cos x)^3 + 3\sin x(\cos x)^2((\sin x)^2 + 2\sin x + 1)}{(\cos x)^6}\\
&= \frac{2(\cos x)^2\sin x + 2(\cos x)^2 + 3(\sin x)^3 + 6(\sin x)^2 + 3\sin x}{(\cos x)^4}\\
&= \frac{(\sin x)^3 + 4(\sin x)^2 + 5\sin x + 2}{(\cos x)^4}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in I,\ f'(x)=\frac{1+\sin x}{(\cos x)^2},\ f''(x)=\frac{(\sin x)^2+2\sin x+1}{(\cos x)^3}\ \text{et}\ f^{(3)}(x)=\frac{(\sin x)^3+4(\sin x)^2+5\sin x+2}{(\cos x)^4}.}$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x\in I$, $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.

Initialisation : Pour $n=0$, $\boxed{\text{le polynôme } P_0=X+1 \text{ convient.}}$
Notons au passage que d'après la question précédente,

$$\boxed{\text{les polynômes } P_1=X+1,\ P_2=X^2+2X+1 \text{ et } P_3=X^3+4X^2+5X+2 \text{ conviennent.}}$$

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$..
Supposons qu'il existe un polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x\in I$, $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
On a alors pour tout $x\in I$:

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x)&=\left(f^{(n)}\right)'(x)\\&=\frac{\cos xP_n'(\sin x)(\cos x)^{n+1}+(n+1)\sin x(\cos x)^nP_n(\sin x)}{(\cos x)^{2n+2}}\\&=\frac{(\cos x)^2P_n'(\sin x)+(n+1)\sin xP_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}\\&=\frac{(1-(\sin x)^2)P_n'(\sin x)+(n+1)\sin xP_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}=\frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}\end{aligned}$$

en posant $P_{n+1}(X)=(1-X^2)P_n'(X)+(n+1)XP_n(X)\in\mathbb{R}[X]$ (car $P_n\in\mathbb{R}[X]$).

Conclusion :

$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}, \text{ il existe un polynôme } P_n\in\mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x\in I,\ f^{(n)}(x)=\frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.}$

De plus, cette suite vérifie :

$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}(X)=(1-X^2)P_n'(X)+(n+1)XP_n(X).}$$

3. • *Montrons d'abord l'unicité de la suite (P_n). L'article défini « le » de l'énoncé semble indiquer qu'elle est demandée...*
Soit $n\in\mathbb{N}$.
On suppose qu'"il existe deux polynômes P_n et Q_n vérifiant $\forall x\in I$, $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}=\frac{Q_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
Alors pour tout $x\in I$, $(P_n-Q_n)(\sin x)=0$.
Comme $\sin(I)=]-1,1[$, on a pour tout $t\in]-1,1[$, $(P_n-Q_n)(t)=0$.
Ainsi, le polynôme P_n-Q_n a une infinité de racines donc c'est le polynôme nul d'où $P_n=Q_n$.
Il y a donc bien unicité de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
• Montrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, P_n est unitaire, de degré n et ses coefficients sont des entiers naturels.

Initialisation : Les polynômes $P_1=X+1$ et $P_2=X^2+2X+1$ sont bien unitaires à coefficients dans $\mathbb{N}$, $\deg(P_1)=1$ et $\deg(P_2)=2$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$. On suppose que le polynôme P_n est unitaire, de degré n et ses coefficients sont des entiers naturels.
Alors il existe $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{N}^n$ tel que $P_n=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$.
On a alors :

$$\begin{aligned}P_{n+1}&=(1-X^2)P_n'(X)+(n+1)XP_n(X)\\&=(1-X^2)\left(nX^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}ka_kX^{k-1}\right)+(n+1)X\left(X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k\right)\\&=nX^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}ka_kX^{k-1}-nX^{n+1}-\sum_{k=1}^{n-1}ka_kX^{k+1}+(n+1)X^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}(n+1)a_kX^{k+1}\\&=X^{n+1}+\underbrace{n}_{\in\mathbb{N}}X^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}\underbrace{(k+1)a_{k+1}}_{\in\mathbb{N}}X^k+\underbrace{(n+1)a_0}_{\in\mathbb{N}}X+\sum_{k=2}^{n}\underbrace{(n+2-k)a_{k-1}}_{\in\mathbb{N}}X^k.\end{aligned}$$

On en déduit que P_{n+1} est un polynôme unitaire, de degré $n+1$ et tous ses cœfficients sont des entiers naturels (car c'est une somme de polynômes à cœfficients dans $\mathbb{N}$).
Conclusion :
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ le polynôme } P_n \text{ est unitaire, de degré } n \text{ et ses coefficients sont des entiers naturels.}}$

4. On a pour tout $x \in I$:

$$f(x)^2 + 1 = \frac{(\sin x + 1)^2}{(\cos x)^2} + 1 = \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1 + (\cos x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{2 + 2\sin x}{(\cos x)^2} = 2f'(x).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in I,\ 2f'(x) = f(x)^2 + 1.}$$

5. • En appliquant la relation obtenue dans la question précédente en $x = 0$, on obtient

$$2f'(0) = (f(0))^2 + 1 \text{ c'est-à-dire } \boxed{2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1.}$$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant n fois la relation obtenue à la question précédente, on obtient par la formule de Leibniz :

$$\forall x \in I, \quad 2f^{(n+1)}(x) = (f \times f)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x).$$

En appliquant en $x = 0$, on obtient la relation souhaitée.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.}$$

I.B - Développement en série entière

6. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, en lui appliquant la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et $x \in [0, \pi/2[$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)dt \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} \frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}} dt. \end{aligned}$$

Or, comme $x \in [0, \pi/2[$, on a pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{(x-t)^N}{N!} \geqslant 0$, $(\cos t)^{N+2} \geqslant 0$ et comme P_{N+1} est à coefficients positifs et $\sin t \geqslant 0$, $P_{N+1}(\sin t) \geqslant 0$.
Par positivité de l'intégrale ($0 \leqslant x$), on en déduit :

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} \frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}} dt \geqslant 0.$$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, \pi/2[,\ \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).}$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\alpha_n = P_n(0)$, c'est le cœfficient constant de P_n donc c'est un entier naturel (c'est vrai aussi pour $n = 0$). Pour tout $x \in [0, \pi/2[$ la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ est donc à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par $f(x)$ d'après la question précédente donc la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ converge.
On en déduit que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, $x \leqslant R$. En faisant tendre x vers $\pi/2$, on obtient $\boxed{R \geqslant \pi/2.}$

8. Par produit de Cauchy de la série entière $\sum \frac{\alpha_n}{n!}x^n$ avec elle-même, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$ et donc en particulier pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
(g(x))^2 + 1 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}x^n\right)^2 + 1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!}\frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n + 1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\alpha_k\alpha_{n-k}\right)x^n + 1 \\
&= \alpha_0^2 + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_k\alpha_{n-k}\right)x^n \\
&= 2\alpha_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha_{n+1}}{n!}x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)!}x^n \\
&= 2g'(x)
\end{aligned}$$

par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence.

$$\boxed{\forall x \in I,\ 2g'(x) = g(x)^2 + 1.}$$

9. Soit $\varphi = \arctan(f)$ et $\psi = \arctan(g)$.
Les fonctions φ et ψ sont dérivables sur l'intervalle I et on a pour tout $x \in I$:

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{(f(x))^2+1} = \frac{1}{2} \text{ et } \psi'(x) = \frac{g'(x)}{(g(x))^2+1} = \frac{1}{2}$$

d'après les relations établies aux questions 4 et 8.
On en déduit qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = g(x) + K$.
De plus, $\psi(0) = \arctan(g(0)) = \arctan(\alpha_0) = \arctan(f(0)) = \varphi(0)$ d'où $K = 0$.
Par suite, pour tout $x \in I$, $f(x) = \tan(\varphi(x)) = \tan(\psi(x)) = g(x)$.

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) = g(x).}$$

10. Raisonnons par l'absurde en supposant $R > \pi/2$. Alors la fonction g, continue sur $]-R,R[$, serait continue en $\pi/2$.

Or $\lim_{x\to\pi/2^-} g(x) = \lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\overbrace{\sin x+1}^{\to 2}}{\underbrace{\cos x}_{\to 0^+}} = +\infty$ donc g n'est pas continue en $\pi/2$, ce qui est absurde.
On a donc bien $\boxed{R = \pi/2.}$

I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $h : I \to \mathbb{R}$.
Analyse : S'il existe p paire et i impaire telle que $h = p + i$ sur I alors pour tout $x \in I$, on a :

$$h(x) = p(x) + i(x) \text{ et } h(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x),$$

donc $p(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2}$.
Synthèse : Réciproquement, soit $p : x \in I \mapsto \frac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $i : x \in I \mapsto \frac{h(x)-h(-x)}{2}$. Alors :

- pour tout $x \in I$, $-x \in I$ et $p(-x) = \frac{h(-x)+h(-(-x))}{2} = \frac{h(x)+h(-x)}{2} = p(x)$ donc p est paire
- pour tout $x \in I$, $-x \in I$ et $i(-x) = \frac{h(-x)-h(-(-x))}{2} = -\frac{h(x)-h(-x)}{2} = -i(x)$ donc i est impaire

- pour tout $x \in I$, $p(x) + i(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2} + \frac{h(x)-h(-x)}{2} = h(x)$ donc $h = p + i$.

Conclusion :

$\boxed{\text{Toute fonction } h : I \to \mathbb{R} \text{ s'écrit de façon unique sous la forme } h = p + i \text{ avec } p \text{ paire et } i \text{ impaire.}}$

12. Pour tout $x \in I$, on a :
$$f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x},$$
et la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ est paire, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ est impaire.
Par ailleurs, pour tout $x \in I$, comme les séries qui apparaissent ci-dessous convergent (les suites $\left(\frac{\alpha_{2n}}{(2n)!}x^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 en tant que suites extraites donc les rayons de convergence des séries entières $\sum \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$ et $\sum \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ sont supérieurs ou égaux à $\pi/2$), on a aussi :
$$f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$
et la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$ est paire, la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ est impaire.
D'où par l'unicité de la décomposition prouvée à la question précédente, on a :
$$\boxed{\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} \text{ et } \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!}x^{2n}.}$$

13. D'après la question précédente, tan est développable en série entière sur I et elle coïncide donc avec sa série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}x^n$ sur I.
Par unicité du développement en série entière, on en déduit que :
$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \tan^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } \tan^{(2n+1)}(0) = \alpha_{2n+1}.}$$

14. Pour tout $x \in I$, $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2$ donc $\boxed{t' = 1 + t^2.}$

15. Pour tout $x \in I$, $t'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!}x^{2n}$.
Par produit de Cauchy, on a aussi pour tout $x \in I$:
$$\begin{aligned} t'(x) = (t(x))^2 + 1 &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)^2 + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}\frac{\tan^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}\right)x^n + 1. \end{aligned}$$
Par unicité du développement en série entière de t' sur I, on en déduit que $\alpha_1 = 0 + 1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$:
$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}\frac{\tan^{(2n-k)}(0)}{(2n-k)!} \\ &= \frac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\tan^{(k)}(0)\tan^{(2n-k)}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!}\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n}\binom{2n}{k}\underbrace{\tan^{(k)}(0)}_{=0}\tan^{(2n-k)}(0) + \frac{1}{(2n)!}\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n}\binom{2n}{k}\tan^{(k)}(0)\tan^{(2n-k)}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}\tan^{(2k-1)}(0)\tan^{(2n-(2k-1))}(0) \\ &= \frac{1}{(2n)!}\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}\alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1} \quad \text{(d'après 13 avec } 2k-1 \text{ et } 2n-2k+1 \text{ impairs).} \end{aligned}$$
Ainsi :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}\alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}.}$$

II. Equivalent de α_{2n+1}

II.A - La fonction zêta

16. Soit $s > 1$.
   - Posons $g : t \mapsto \frac{1}{t^s} = \exp(-s\ln(t))$. La fonction g est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.
   - Par suite, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $t \in [n, n+1]$, $g(t) \leqslant g(n)$ d'où par positivité de l'intégrale ($n \leqslant n+1$), on a :
   $$\int_n^{n+1} g(t)dt \leqslant \int_n^{n+1} g(n)dt = g(n).$$
   Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. En sommant ces inégalités pour n allant de 2 à p et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :
   $$\int_2^{p+1} g(t)dt = \sum_{n=2}^{p} \int_n^{n+1} g(t)dt \leqslant \sum_{n=2}^{p} g(n).$$
   - De même, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $t \in [n-1, n]$, $g(t) \geqslant g(n)$ d'où par positivité de l'intégrale ($n-1 \leqslant n$), on a :
   $$\int_{n-1}^{n} g(t)dt \geqslant \int_{n-1}^{n} g(n)dt = g(n).$$
   En sommant ces inégalités pour tout n allant 2 à p et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :
   $$\int_1^{p} g(t)dt = \sum_{n=2}^{p} \int_{n-1}^{n} g(t)dt \geqslant \sum_{n=2}^{p} g(n).$$
   On a donc obtenu :
   $$\int_2^{p+1} \frac{1}{t^s}dt \leqslant \sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n^s} \leqslant \int_1^{p} \frac{1}{t^s}dt.$$
   Comme $s > 1$, la série et les intégrales de Riemann en $+\infty$ convergent et on obtient par passage à la limite $p \to +\infty$:
   $$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^s}dt \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}dt.}$$
   En calculant les intégrales, on obtient :
   $$\left[\frac{1}{-s+1}t^{-s+1}\right]_2^{+\infty} \leqslant \zeta(s) - 1 \leqslant \left[\frac{1}{-s+1}t^{-s+1}\right]_1^{+\infty}$$
   d'où en ajoutant 1 :
   $$1 + \frac{1}{(s-1)2^{s-1}} \leqslant \zeta(s) \leqslant 1 + \frac{1}{s-1}.$$
   Comme $\lim_{s\to+\infty} 1 + \frac{1}{(s-1)e^{(s-1)\ln 2}} = 1 = \lim_{s\to+\infty} 1 + \frac{1}{(s-1)}$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que :
   $$\boxed{\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1.}$$

17. Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on a (toutes les séries en jeu convergent) :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{j^s} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s),$$
   donc :
   $$\boxed{C(s) = 1 - \tfrac{1}{2^s} \text{ convient.}}$$

II.B - Une formule pour la fonction cosinus

18. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$.
 • Posons pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $u(t) = 2x\sin(2xt)$ et $v(t) = (\cos t)^n$.
 Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et on a pour tout $t \in [0, \pi/2]$:

$$u'(t) = 4x^2\cos(2xt) \text{ et } v'(t) = -n\sin t(\cos t)^{n-1}.$$

 Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned} 4x^2 I_n(x) &= \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t)dt = [2x\sin(2xt)(\cos t)^n]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} 2x\sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}dt \\ &= n\int_0^{\pi/2} 2x\sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}dt. \end{aligned}$$

 Posons à présent pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $u(t) = -\cos(2xt)$ et $v(t) = \sin t(\cos t)^{n-1}$.
 Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et on a pour tout $t \in [0, \pi/2]$:

$$u'(t) = 2x\sin(2xt) \text{ et } v'(t) = (\cos t)^n - (n-1)(\sin t)^2(\cos t)^{n-2}.$$

 Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} 4x^2 I_n(x) &= n\int_0^{\pi/2} 2x\sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}dt \\ &= n\left[-\cos(2xt)\sin(t)(\cos t)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)((\cos t)^n - (n-1)(\sin t)^2(\cos t)^{n-2})dt \\ &= \underbrace{0}_{\text{car } n\geqslant 2} + n\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(\cos t)^n dt - n(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(1-(\cos t)^2)(\cos t)^{n-2}dt \\ &= nI_n(x) - n(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(\cos t)^{n-2}dt + n(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(2xt)(\cos t)^n dt \\ &= nI_n(x) - n(n-1)I_{n-2}(x) + n(n-1)I_n(x) = n^2 I_n(x) - n(n-1)I_{n-2}(x), \end{aligned}$$

 donc $(n^2 - 4x^2)I_n(x) = n(n-1)I_{n-2}(x)$ d'où en divisant par $n^2 \neq 0$:

$$\boxed{\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x).}$$

 • En particulier pour $x = 0$, on a $I_n(0) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(0)$.
 De plus, comme la fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue, positive sur $[0, \pi/2]$ et n'est pas la fonction nulle ($\cos(0) = 1$), on a $I_n(0) = \int_0^{\pi/2}(\cos t)^n dt > 0$ donc on peut diviser par $I_n(0)$ et on obtient :

$$\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)\frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{\frac{n-1}{n} I_{n-2}(x)}{\frac{n-1}{n} I_{n-2}(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

$$\boxed{\left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)\frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.}$$

19. Soit $x \in \mathbb{R}$.
 Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$.
 Initialisation : (pour $n = 1$)
 On a :

$$\pi x \frac{I_2(x)}{I_2(0)} \prod_{k=1}^1 \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \pi x \frac{I_2(x)}{I_2(0)}\left(1 - \frac{4x^2}{2^2}\right) = \pi x \frac{I_0(x)}{I_0(0)} \quad \text{(par la question précédente avec } n = 2\text{).}$$

Or, $I_0(0) = \int_0^{\pi/2} 1dt = \pi/2$
et $2xI_0(x) = \int_0^{\pi/2} 2x\cos(2xt)dt = [\sin(2xt)]_0^{\pi/2} = \sin(2x(\pi/2)) - \sin(2x \times 0) = \sin(\pi x)$.
Ainsi, $\pi x \frac{I_2(x)}{I_2(0)} \prod_{k=1}^{1}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{\sin(\pi x)}{\pi/2} = \sin(\pi x)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$.
Alors :

$$\begin{aligned}
\pi x \frac{I_{2n+2}(x)}{I_{2n+2}(0)} \prod_{k=1}^{n+1}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) &= \pi x \frac{I_{2n+2}(x)}{I_{2n+2}(0)}\left(1 - \frac{x^2}{(n+1)^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \\
&= \pi x \frac{I_{2n+2}(x)}{I_{2n+2}(0)}\left(1 - \frac{4x^2}{(2n+2)^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \\
&= \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \quad \text{(par la question précédente en remplaçant } n \text{ par } 2n+2 \geqslant 2) \\
&= \sin(\pi x) \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence).}
\end{aligned}$$

Conclusion : On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).}$$

20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]0,1[$. On a $\pi x \in]0,\pi[$ donc $\sin(\pi x) \neq 0$. On a donc en appliquant la question précédente avec x et n puis $2x$ et $2n$:

$$\begin{aligned}
\cos(\pi x) &= \frac{1}{2}\frac{\sin(2\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{2}\frac{\sin(\pi(2x))}{\sin(\pi x)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi(2x)\frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\prod_{k=1}^{2n}\left(1 - \frac{(2x)^2}{k^2}\right)}{\pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} \\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\frac{\prod_{k=1}^{2n}\left(1 - \frac{(2x)^2}{k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} \\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{(2x)^2}{(2k)^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{(2x)^2}{(2k-1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} \\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{(2x)^2}{(2k-1)^2}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} \\
&= \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{(2x)^2}{(2k-1)^2}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0,1[,\ \cos(\pi x) = \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)}\frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right).}$$

Notons que la formule est encore valable pour $x = 0$ (on le vérifie aisément en prenant $x = 0$).

II.C - Un équivalent de α_{2n+1}

21. D'après la question 12, pour tout $x \in [0,1/2[$, comme $\pi x \in [0,\pi/2[\subset I$, on a

$$\pi\tan(\pi x) = \pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}(\pi x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}\pi^{2n+2}x^{2n+1}.$$

Par ailleurs, d'après le développement admis, on a pour tout $x \in [0, 1/2[$ en posant $n = p - 1$,

$$\pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p} - 1)\zeta(2p)x^{2p-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(2^{2n+2} - 1)\zeta(2n+2)x^{2n+1}.$$

Ces deux égalités restent valables sur $]-1/2, 0]$ par imparité de toutes les fonctions apparaissant ici. Par unicité du développement en série entière de $x \mapsto \pi \tan(\pi x)$ sur $]-1/2, 1/2[$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}\pi^{2n+2} = 2(2^{2n+2} - 1)\zeta(2n+2)$$

d'où :

$$\boxed{\alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}\zeta(2n+2).}$$

22. Comme $\lim_{n\to+\infty} \zeta(2n+2) = 1$ (d'après Q16 puisque $\lim_{n\to+\infty}(2n+2) = +\infty$), on a $\zeta(2n+2) \sim 1$ et par suite :

$$\boxed{\alpha_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2(2^{2n+2})(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} = \frac{2^{2n+3}(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}.}$$

On peut éventuellement aller plus loin en utilisant Stirling, mais quel intérêt ici ?!