ÉTUDE D'UN CIRCUIT RLC SÉRIE

On dispose d'une bobine $\mathcal{B}$ que l'on assimilera à l'association série d'une inductance L et d'une résistance r. (L et r sont des constantes positives, indépendantes de la fréquence).

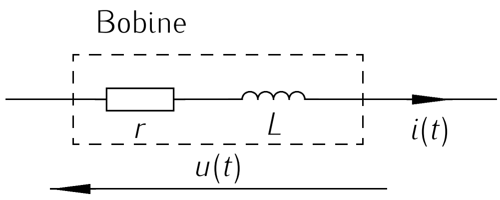


FIGURE 1 – Bobine $\mathcal{B}$

I. Détermination de r

1. La bobine est parcourue par un courant $i(t)$. Exprimer la tension $u(t)$ à ses bornes en fonction de r, L, $i(t)$ et de sa dérivée par rapport au temps. Q1
2. On réalise le circuit suivant, en plaçant, en série avec la bobine, un résistor de résistance $R = 40\ \Omega$. L'alimentation est un générateur de tension continue, constante, de force électromotrice $E_0 = 1{,}0$ V et de résistance interne $r_0 = 2{,}0\ \Omega$.

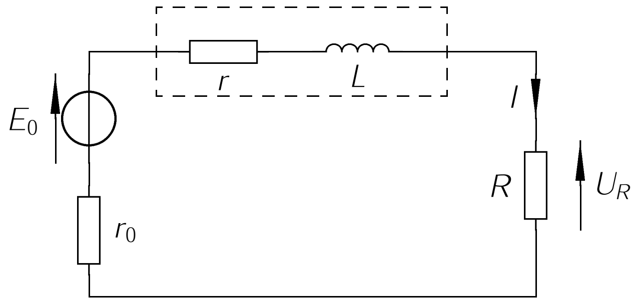


FIGURE 2 – Détermination de r

On mesure, en régime permanent, la tension U_R aux bornes de R.

Q2 Exprimer r en fonction des données de cette question. Calculer r avec $U_R = 0{,}56$ V.

II. Détermination de r et L à partir d'un oscillogramme.

On place, en série avec la bobine, un résistor de résistance $R = 40\ \Omega$ et un condensateur de capacité $C = 10\ \mu$F. Le GBF (générateur basses fréquences) est réglé pour délivrer une tension sinusoïdale de fréquence $f = 250$ Hz (la pulsation sera notée ω) et de valeur crête a crête de 10 V.
Deux tensions sont visualisées sur un oscilloscope numérique.

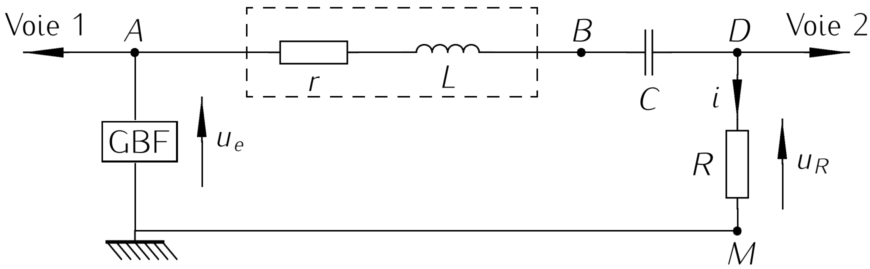


FIGURE 3 – Détermination de r et L

On obtient un oscillogramme équivalent au graphe suivant.

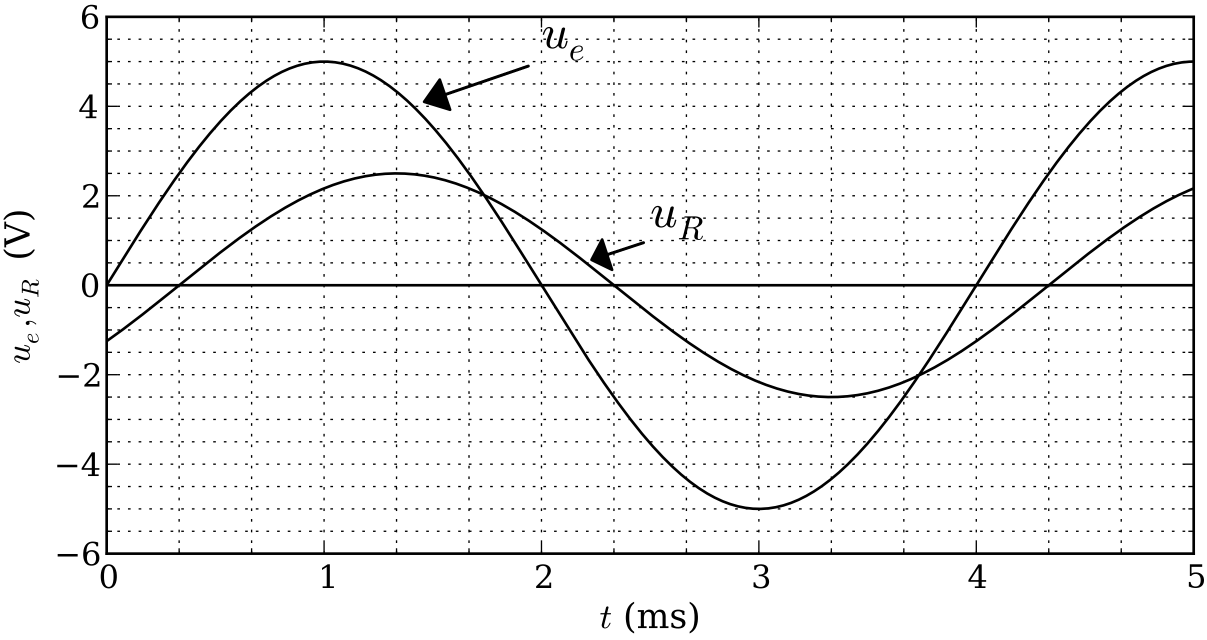


FIGURE 4 – Oscillogramme

Q3 1. Déterminer l'amplitude U_e de la tension u_e et l'amplitude U_R de la tension u_R.

Q4 2. Déterminer l'amplitude I du courant i.

Q5 3. Rappeler l'expression générale de l'impédance Z d'un dipôle quelconque (module de l'impédance complexe). Calculer alors l'impédance Z_{AM} du dipôle AM (valeur numérique).

Q6 4. Des deux tensions, $u_R(t)$ et $u_e(t)$, laquelle, et pourquoi d'après l'oscillogramme, est en avance sur l'autre ?

Q7 5. Déterminer précisément, à partir de l'oscillogramme, le déphasage $\varphi_{u_e/i}$ entre u_e et i, (c'est-a-dire entre u_e et u_R).

Q8 6. Écrire l'expression générale de l'impédance complexe $\underline{Z}_{AM}$ en fonction de r, R, L, C et ω.

Q9 7. Écrire l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}_{AM}$ en fonction de son module Z_{AM} et du déphasage $\varphi_{u_e/i}$.

Q10 8. Exprimer r en fonction de R, Z_{AM} et $\varphi_{u_e/i}$. Calculer sa valeur.

Q11 9. Exprimer L en fonction de C, ω, Z_{AM} et $\varphi_{u_e/i}$. Calculer sa valeur.

COMMENT ACCORDER UNE GUITARE

A. Recherche des solutions en ondes stationnaires

On considère une corde homogène initialement au repos et confondue avec l'axe Ox, inélastique, de masse linéique μ (masse par unité de longueur), tendue par une tension pratiquement uniforme et constante T (en N). La corde est tendue par une masse par l'intermédiaire d'une poulie. La corde est fixée au point O et un guidage impose $y = 0$ à chaque instant à l'abscisse $x = L$.
On étudie les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan xOy, autour de la position d'équilibre.
L'élongation transversale à l'instant t du point M d'abscisse x est notée $y(x,t)$.

1. Une étude de l'équation d'onde (non demandée) montre que l'on peut chercher les fonctions $y(x,t)$ sous la forme suivante, avec $k = \frac{\omega}{c}$:

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_2)$$

Q12 (a) Quelle est le nom de la constante k ? Donner sa dimension puis son unité. Justifier.

Q13 (b) Donner la relation entre k et λ la période spatiale de l'onde. Justifier.

Q14 (c) Que peut-on dire de l'élongation aux points $x = 0$ et $x = L$ à chaque instant ?

(d) En déduire que k ne peut prendre qu'une série de valeur discrètes k_n, appelées valeurs propres. Définir
Q15 n.

Q16 (e) En déduire l'expression de L en fonction de λ_n.

Q17 (f) Exprimer la fréquence propre f_n en fonction de c et L.

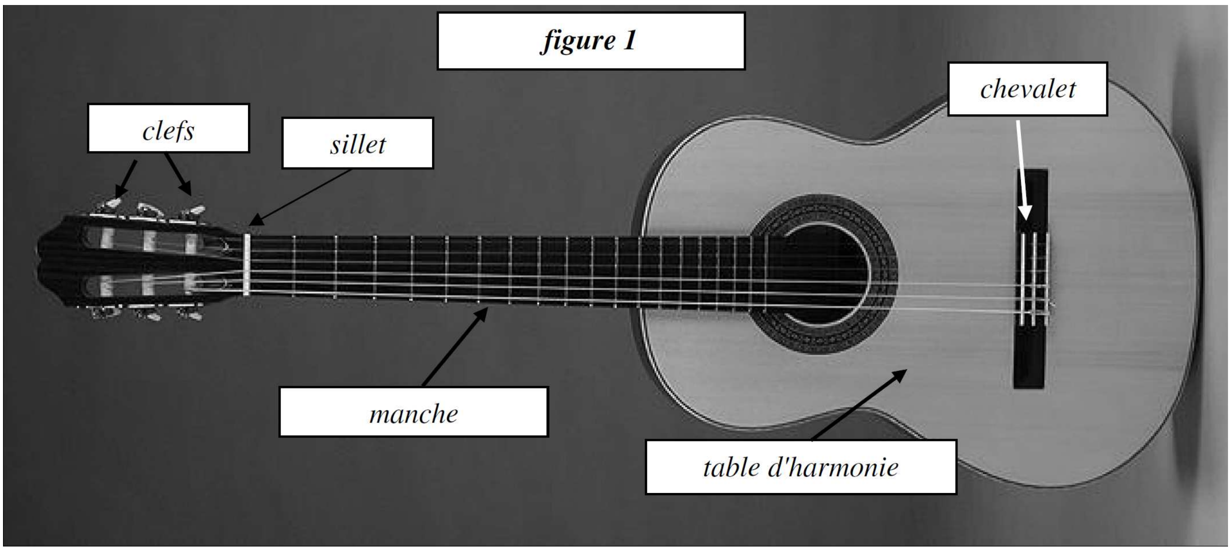
2. À chaque valeur de f_n correspond un mode propre. Le mode $n = 1$ (correspondant à la plus petite fréquence non nulle définie ci-dessus) est appelé mode fondamental. Les modes correspondant à n supérieur à 1 sont les harmoniques.

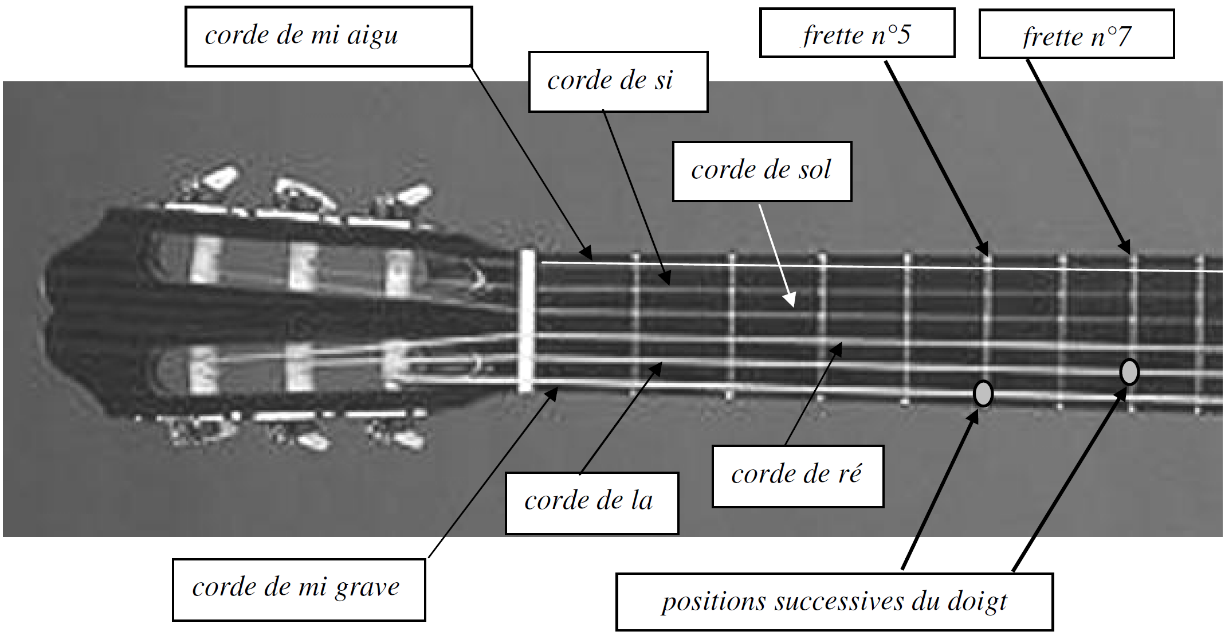
Q18 Exprimer l'élongation $y_n(x, t)$ du mode d'indice n avec les variables n, c, L et φ_2.
Donner une représentation graphique de la corde en mouvement (à un instant donné) pour le fondamental et les deux premiers harmoniques. Montrer la position des noeuds et des ventres.

Q19 3. Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde.

B. Application à une corde de guitare

Les frettes placées le long du manche d'une guitare permettent au musicien de modifier la hauteur du son produit par la corde. En pressant la corde contre une frette, il diminue sa longueur, provoquant une augmentation de la fréquence fondamentale de la vibration de la corde.





Q20 1. À l'aide de la partie précédente, donner la fréquence de vibration fondamentale d'une corde de longueur L le long de laquelle les ondes se propagent à la célérité c.

2. La note monte d'un demi-ton lorsque la fréquence est multipliée par $2^{1/12}$. Pour cela, comment faut-il modifier
Q21 la longueur de la corde ?

3. En plaçant le doigt sur les frettes successives, on monte chaque fois la note d'un demi-ton. Combien de frettes peut-il y avoir au maximum, sachant que la distance d entre la dernière frette et le point d'accrochage
Q22 de la corde doit être supérieure à $\frac{L}{4}$?

4. On cherche la formule de la célérité c de propagation de l'onde le long de la corde. Une étude qualitative montre qu'elle peut s'écrire sous la forme $c = A.m^{\alpha}.L^{\beta}.T^{\gamma}$, avec A une constante sans dimension, m la masse de la corde, L sa longueur et T la tension de la corde.

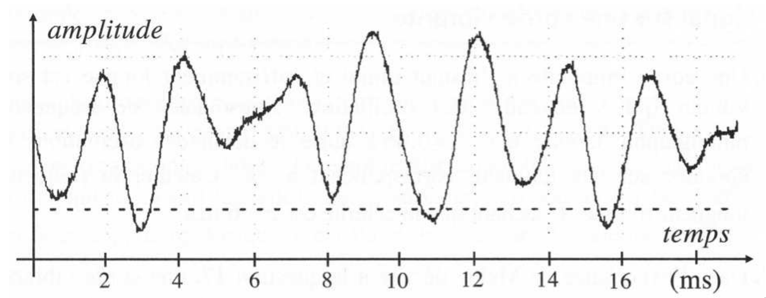
   (a) Déterminer α, β, et γ par analyse dimensionnelle.
Q23 On donne $A = 1$, conclure en donnant la formule finale de la célérité c en fonction de T et de la masse linéique μ de la corde.

Q24 (b) Calculer la tension T de la corde mi_3 dont la fréquence fondamentale est $f_1 = 330$ Hz. On donne la longueur de la corde $L = 63$ cm et sa masse linéique $\mu = 0{,}55$ g.m^{-1}.

C. Étude spectrale d'un son

Dans l'enregistrement du son produit par une guitare au moyen d'un microphone et d'un amplificateur, c'est la tension produite par l'amplificateur qui est en fait enregistrée. Dans l'étude ci-dessous, la corde de mi_1 (de fréquence 82,4 Hz) est frappée près du chevalet.

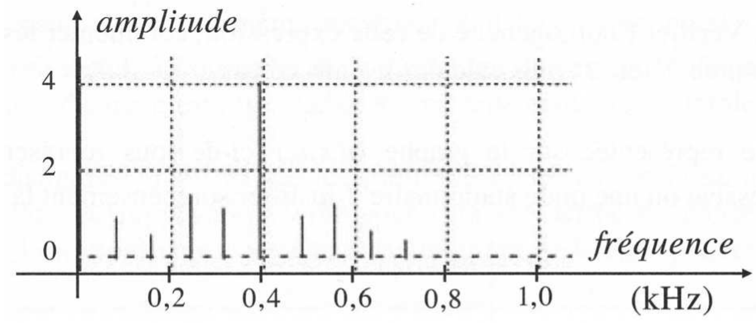
1. Le premier enregistrement concerne la courbe d'amplitude du signal en fonction du temps.



Q25 (a) Comment peut-on décrire ce signal ? Est-ce un signal sinusoïdal ?

Q26 (b) Évaluer la fréquence principale qui correspond à la composante de plus grande amplitude.

2. Le second enregistrement est une analyse spectrale du signal précédent.



Q27 (a) Comme s'appelle l'opération mathématique qui permet d'obtenir le spectre du signal ?

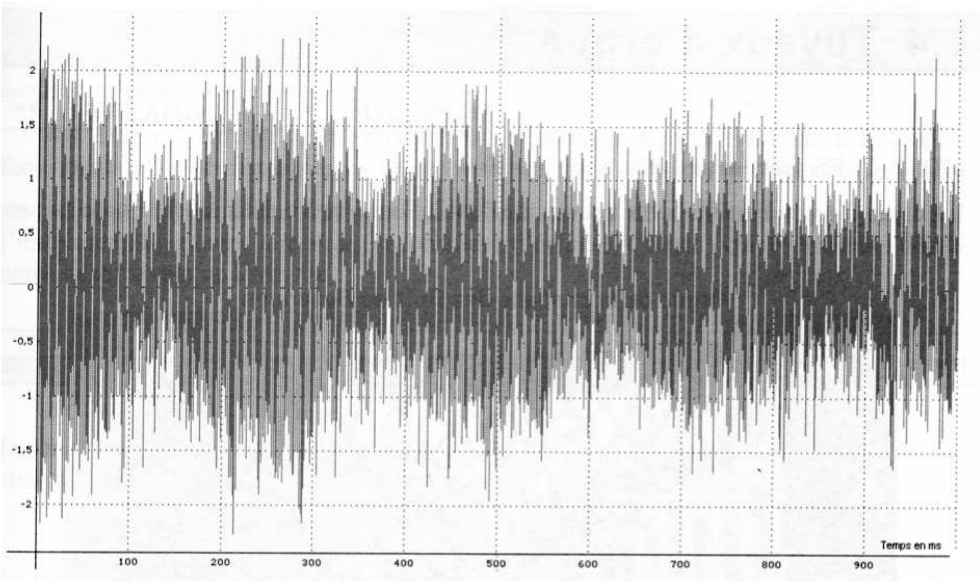
Q28 (b) Décrire le spectre. Est-il en accord avec la fréquence calculée précédemment à la question 1b) ?

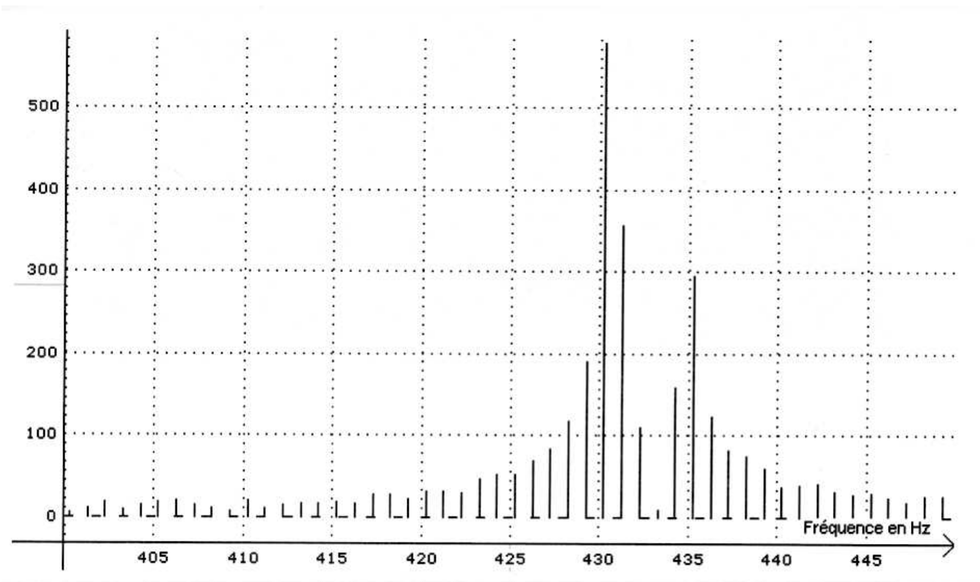
Q29 (c) Comment s'y prend le guitariste pour jouer d'autres notes sur cette même corde ?

3. On se propose d'illustrer un moyen commode pour accorder les cordes entre elles en prenant l'exemple de l'accordage de la corde $ré_2$, à partir de la corde la_1. Le guitariste s'arrange pour jouer la « même »note sur ces deux cordes (il place ses doigts et pince les cordes comme il faut, les explications ne sont pas nécessaires

ici). Ensuite, il règle la tension de la corde $ré_2$ de manière à ce que les deux cordes produisent la même note.

Les figures suivantes représentent la tension délivrée par un microphone (en V) en fonction du temps (un carreau correspond à 100 ms) ainsi que le spectre du signal lors d'un essai d'accordage des cordes la_1 et $ré_2$ par la méthode précédente.





(a) Comment s'appelle le phénomène observé ? De quelle façon se manifeste-t-il dans le son entendu par
Q30 l'oreille ?

Q31 (b) Montrer que les deux graphiques expérimentaux sont compatibles **de manière quantitative**.

Q32 (c) Comment doit-on alors procéder pour accorder les cordes entre elles ?