

## RESSORT EN ROTATION

On considère un mobile quasi ponctuel  $M$ , de masse  $m$  qui peut se déplacer sans frottement le long d'un axe  $(OM)$  toujours horizontal et mis en rotation uniforme autour de l'axe  $Oz$  vertical, la vitesse angulaire étant nommée  $\omega = \dot{\theta} = Cte$ .

Le point  $M$  est relié à  $O$  par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0 = r_0$ .

On a représenté la base cylindro polaire mobile sur les figures.

Pour les applications numériques, on prendra  $r_0 = 20,0$  cm,  $m = 100$  g et  $k = 20$  N.m<sup>-1</sup>.

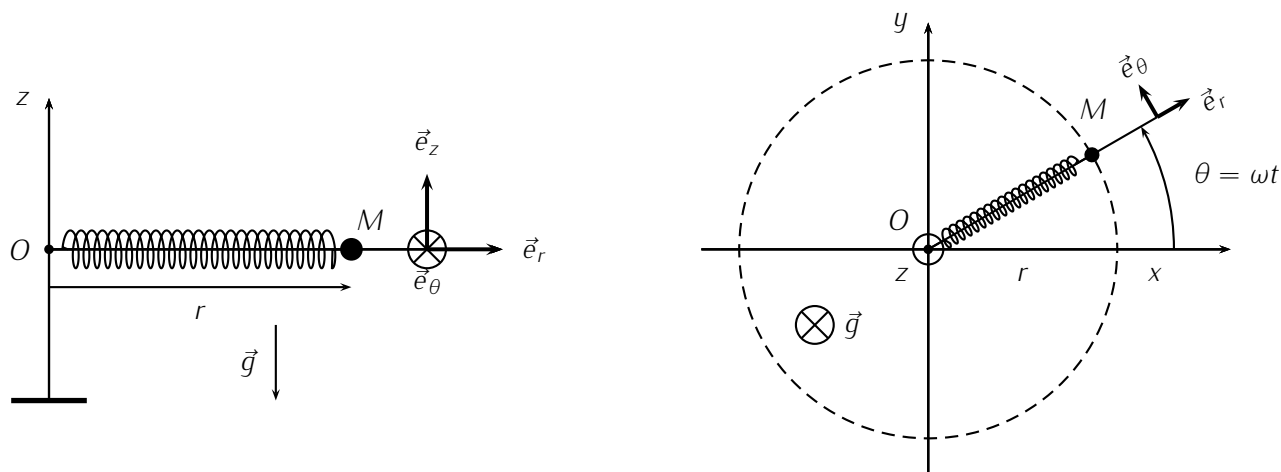


FIGURE 1 – Masse liée à ressort en rotation uniforme

### A. Cinématique

1. Rappeler l'expression la plus générale du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ , du vecteur vitesse  $\vec{v}$  et du vecteur accélération d'un point matériel  $M$  dans le système de coordonnées cylindro-polaires  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .
2. Que devient cette dernière expression dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme ?

### B. Mouvement circulaire

Dans un premier temps, on suppose que  $M$  est immobile **par rapport à la tige en rotation** ( $r = r_e = Cte$ ) c'est à dire qu'il est animé d'un mouvement circulaire uniforme, de rayon  $r_e$  dans le référentiel lié au sol qu'on considérera comme galiléen.

1. Par application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au sol, déterminer l'expression de  $\vec{R}$  la réaction de l'axe sur  $M$  en fonction des données et des vecteurs de la base cylindro-polaire.
2. Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système dans le référentiel galiléen ? Justifiez.
3. Déterminer l'expression de  $r_e$  en fonction des données  $\omega$ ,  $k$ ,  $m$  et  $r_0$ .
4. L'expression de  $r_e$  est-elle valable quelle que soit la valeur de  $\omega$  ? Montrer qu'il existe une valeur particulière de  $\omega$ , notée  $\omega_e$ . Calculer sa valeur numérique.
5. L'expression de la force élastique exercée par le ressort n'est valable que si l'allongement du ressort, ici égal à  $r - r_0$  reste inférieur à  $\frac{r_0}{2}$ .  
Exprimer, en fonction de  $\omega_e$ , la valeur maximale  $\omega_M$  de  $\omega$  pour que l'expression de  $r_e$  établie à la question 3. soit valable.
6. Calculer  $\omega_M$  et la valeur de  $r_e$  pour  $\omega = 0,8\omega_M$ .

### C. Mouvement hors équilibre

On étudie maintenant le mouvement de  $M$  autour de sa position d'équilibre sur la tige en rotation ( $r \neq Cte$ ). On posera  $x = r - r_e$ .

Pour les applications numériques, on prendra  $\omega = \frac{0,8\omega_M}{2}$ .

- Q9 1. Quelle est la nouvelle expression de  $\vec{R}$  la réaction de l'axe sur  $M$  en fonction des données, des vecteurs de base et de dérivées temporelles ?
- Q10 2. Montrez que l'énergie mécanique n'est pas constante. Comment en pratique maintient-on  $\dot{\theta} = \omega$  constante ?
- Q11 3. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $r$ .
- Q12 4. En déduire celle vérifiée par  $x = r - r_e$ .
- Q13 5. Représentez l'allure de la trajectoire de  $M$  dans le référentiel lié au sol si  $\omega = 0,4.\omega_M < \omega_e$
- Q14 6. Exprimez la pulsation  $\Omega$  et la période  $T$  des oscillations de  $M$  en fonction de  $\omega$  et  $\omega_e$ . Commentez cette expression selon les valeurs de  $\omega$ . Calculez  $T$ .
- Q15 7. Quelle est la relation liant  $\omega$  et  $\Omega$  pour que la trajectoire de  $M$  dans le référentiel local soit une courbe fermée ?

### D. Un petit penchant pour la difficulté ?

On incline maintenant d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale la tige sur laquelle coulisse  $M$  sans frottement. La longueur du ressort,  $OM$  est maintenant notée  $l$  (longueur à vide  $l_0 = 20,0$  cm) alors que  $r = HM$  où  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe  $Oz$ .

Pour les applications numériques, on prendra  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega = \frac{0,8\omega_M}{2}$  et  $g = 9,8$  m.s<sup>-2</sup>.

- Q16 1. Dans un premier temps, on maintient la tige immobile dans le référentiel lié au sol :  $\omega = 0$  et  $l = Cte$ .  
Quelle est, en fonction des données, l'expression de
- Q17 (a)  $l_1$  la valeur de  $l$  à l'équilibre ?  
(b)  $\vec{R}$  la réaction du support ?
- Q18 2. On met à nouveau la tige en rotation, à la vitesse angulaire  $\omega = Cte$ .  
Quelle est, en fonction des données, l'expression de  $l_2$  la valeur de  $l$  quand  $M$  est immobile par rapport à la tige ?  
Vérifiez votre expression en comparant à la valeur de  $r_e$  trouvée en B. 3.

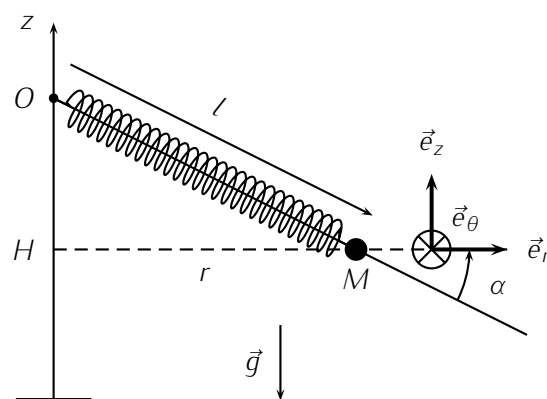
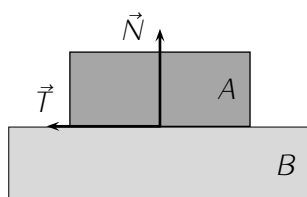


FIGURE 2 – Tige inclinée

### HYSTÉRÉSIS DE FROTTEMENT

Un solide granulaire est un matériau composé de particules solides discrètes de taille typique comprise entre 100 et 3000  $\mu\text{m}$ , et qui restent le plus souvent en contact les unes avec les autres. Cette classe de matériaux comprend les ciments, les sables, les graviers, les granulats, les céréales... On s'intéresse dans ce problème à un aspect statique de la physique de ces systèmes qui restent encore assez mal compris.

#### Formulaire



L'action du solide  $B$  sur le solide  $A$  en contact se décompose en une composante normale  $\vec{N}$  et une composante tangentielle  $\vec{T}$  vérifiant :

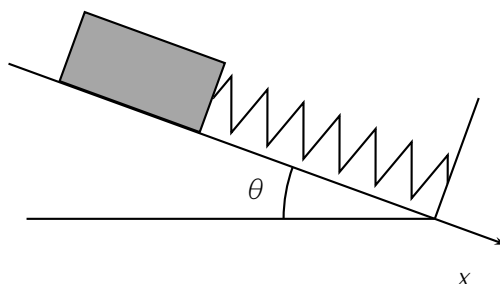
$$\begin{cases} |\vec{T}| \leq \mu_s |\vec{N}| & \text{en l'absence de glissement entre } A \text{ et } B \\ |\vec{T}| = \mu_d |\vec{N}| & \text{lorsqu'il y a glissement de } A \text{ sur } B. \end{cases}$$

$\mu_s$  et  $\mu_d$  sont appelés coefficients de frottement respectivement statique et dynamique et vérifient l'inégalité :  $\mu_d < \mu_s$ .

## 0.1 Hystérésis de frottement

Une des difficultés conceptuelles majeures pour la description d'un système comportant du frottement solide est l'impossibilité de prévoir les positions d'équilibre et le bilan des forces à moins de connaître de façon détaillée l'histoire de la mise en équilibre. Le but de cette partie est d'illustrer ce phénomène (dit d'hystérésis) sur un exemple simple.

Une brique parallélépipédique de poids  $P$  est en contact avec une paroi solide inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport au plan horizontal et est reliée à un ressort de raideur  $k$  (figure ci-dessous). Soit  $\mu_s$ , le coefficient de frottement statique ; on supposera pour simplifier que le coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  est nul et qu'un frottement visqueux très important permet l'arrêt du mouvement. On note  $x$  la déformation du ressort ( $x = 0$  correspond à la position pour laquelle la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide détendu). On cherche à déterminer cette déformation  $x$  à l'équilibre en fonction de l'angle  $\theta$ .



- Q19 1. Exprimer la force de rappel du ressort en fonction de  $k$ ,  $x$  et  $\vec{e}_x$  le vecteur unitaire selon l'axe  $x$ . Vérifier explicitement le signe de cette force.
- Q20 2. On suppose pour le moment que la masse est immobile et que  $\theta = 0$ . À l'aide d'un bilan des forces en déduire  $T = |\vec{T}|$  et  $N = |\vec{N}|$  en fonction de  $x$ ,  $P$  et  $k$ .
- Q21 3. Quelle est la plage de valeurs possibles pour  $x$  à l'équilibre ? Autrement dit quelles sont les  $x$  pour lesquelles l'inégalité  $|\vec{T}| \leq \mu_s |\vec{N}|$  est effectivement vérifiée ?
- Q22 4. Reprendre les deux questions précédentes pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .
- Q23 5. La masse étant immobile et le plan incliné d'un angle  $\theta$ , à l'aide d'un bilan des forces exprimer  $T = |\vec{T}|$  et  $N = |\vec{N}|$  en fonction de  $x$ ,  $P$ ,  $k$  et  $\theta$ . Il est extrêmement vivement conseillé de faire un schéma.
- La paroi est supposée initialement horizontale et le ressort détendu ( $x_0 = 0$ ). On incline progressivement la paroi, l'angle  $\theta$  variant de 0 à  $\pi/2$  ; on note alors  $\theta^+$  les angles d'inclinaison croissants. On désigne par  $x_i^+$  la série des déformations du ressort dans les positions successives de non-glissement de la brique.
- Q24 6. À partir de quel angle, noté  $\theta_1^+$ , la condition de non-glissement  $|\vec{T}| \leq \mu_s |\vec{N}|$  n'est-elle plus vérifiée ? (On rappelle qu'initialement le ressort est détendu.)
- Q25 7. Pour cet angle, déterminer la nouvelle valeur d'équilibre  $x_1^+$  en fonction de  $\theta_1^+$ ,  $P$  et  $k$ . (On rappelle que  $\mu_d = 0$ , la masse est uniquement soumise au poids, à la force du ressort et à la partie normale de la réaction).

- Q26 8. On augmente l'angle d'inclinaison ; un nouveau glissement apparaît pour l'angle  $\theta_2^+$ . En utilisant la même méthode que précédemment, établir la relation entre  $\theta_1^+$ ,  $\theta_2^+$  et  $\mu_s$ .  
On pourra commencer par établir la relation entre  $x_1^+$ ,  $\theta_2^+$  et  $\mu_s$  puis remplacer  $x_1^+$  par son expression en fonction de  $\theta_1^+$ .
- Q27 9. Montrer en s'inspirant des questions précédentes que pour chaque  $x_i^+$  il existe un intervalle  $[\theta_i^+, \theta_{i+1}^+]$  de non-glissement ; on établira la relation de récurrence liant  $\theta_i^+$  et  $\theta_{i+1}^+$ . Vers quelle valeur limite tend la différence  $\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+$ .  
10. On effectue maintenant le parcours inverse en partant de la verticale. On note  $\theta_i^-$  et  $x_i^-$  les angles successifs de glissement et les positions d'équilibre correspondantes.
- Q28 Étudier comme à la question précédente la succession des valeurs d'arrêt  $x_i^-$ .
- Q29 11. Représenter sur un même graphe du plan  $(\theta, x)$  les paliers d'arrêt successifs  $x_i^+$  à inclinaison croissante puis  $x_i^-$  à inclinaison décroissante ; on pourra utiliser le fait que les points  $(\theta_i^+, x_i^+)$ ,  $(\theta_i^-, x_i^-)$ ,  $(\theta_{i+1}^+, x_i^+)$  et  $(\theta_{i+1}^-, x_i^-)$  se situent sur des courbes simples. On prendra  $P/k = 0,1$  m et  $\mu_s = 0,3$ . Commenter le résultat.

# MÉCANIQUE.

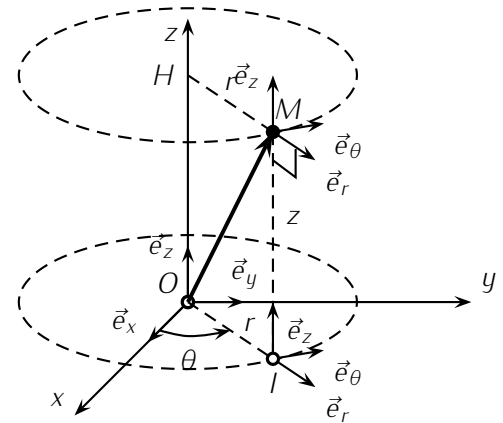
## A. Cinématique

1. Dans le système de coordonnées cylindropolaires,

- $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$  le vecteur position,
- $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$  le vecteur vitesse et
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$  l'accélération.

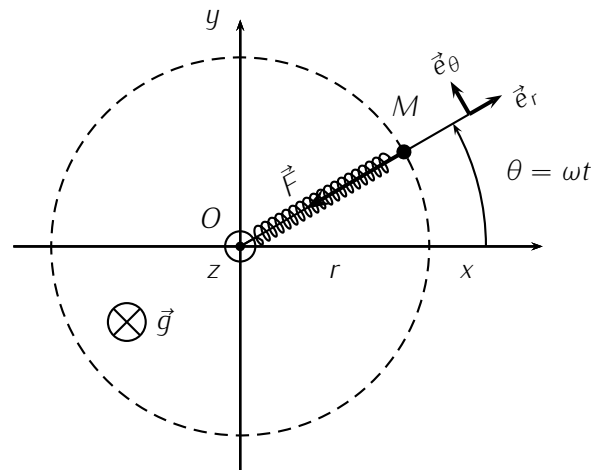
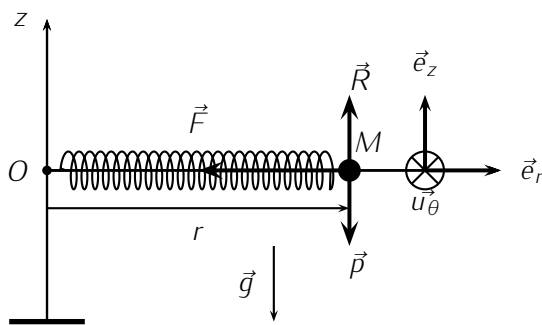
2. Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme

$r$ ,  $\dot{\theta}$  et  $z$  sont des constantes d'où l'expression  $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$



*Un mouvement circulaire uniforme est plan, à  $v = Cte$  mais  $\vec{v}$  variable et accélération centripète : suivant  $-\vec{e}_r$*

## B. Mouvement circulaire



1. Pour déterminer la force  $\vec{R}$ , connaissant la nature du mouvement (MCU), nous allons appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) sur le système  $\{ M \}$  dans le référentiel lié au sol considéré comme galiléen. On adopte le système de coordonnées cylindropolaires : repère de centre  $O$  et de base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

Les forces appliquées (Cf. figure) sont le poids  $\vec{p} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ , la force de rappel due au ressort  $\vec{F} = -k(r - r_0)\vec{e}_r$  et la réaction  $\vec{R}$  de l'axe à déterminer.

*Faites le bilan des forces et représentez les sur une figure, même si c'est au brouillon*

Comme le mouvement se fait sans frottement,  $\vec{R}$  est normale au déplacement sur l'axe donc à  $\vec{e}_r$ , c'est à dire  $\vec{R} \cdot \vec{e}_r = R_r = 0$  la composante de  $\vec{R}$  selon  $\vec{e}_r$ . On notera désormais  $\vec{R} = R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z$ .

Le PFD implique ici,  $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R} + \vec{F}$  avec, en MCU et d'après A.,  $\vec{a} = -r_e\omega^2\vec{e}_r$  car  $r = Cte = r_e$  et  $\dot{\theta} = \omega = Cte$ .

Par projection du PFD selon  $\vec{e}_z$ ,  $0 = -mg + R_z$  soit  $R_z = mg$  et selon  $\vec{e}_\theta$ ,  $0 = 0 + R_\theta$  soit  $R_\theta = 0$ . On en déduit  $\vec{R} = mg\vec{e}_z$ .

*Méthode classique à maîtriser : PFD puis projection(s)*

2. La seule force non conservative appliquée au système est  $\vec{R} = mg \cdot \vec{e}_z$  normale au plan du mouvement, elle ne travaille donc pas. Or, d'après le théorème de l'énergie mécanique, la variation d'énergie mécanique  $E_m$  est égale au travail des forces non conservatives.

Q32

On en déduit ici que  $E_m$  est constante.

3. On a montré que le principe fondamental de la dynamique s'écrit,

$$-mr_e \omega^2 \cdot \vec{e}_r = -mg \cdot \vec{e}_z + mg \cdot \vec{e}_z - k(r - r_0) \cdot \vec{e}_r$$

Q33

soit par projection du PFD sur  $\vec{e}_r$  :  $-m\omega^2 r_e = -k(r_e - r_0) \Rightarrow r_e = \frac{kr_0}{k - m\omega^2}$

**PFD puis projection, rien de bien nouveau**

4.  $r_e$  est forcément positif, soit

$$k - m\omega^2 > 0 \iff \omega < \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega < \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}} \simeq 14,1 \text{ rad.s}^{-1}$$

Remarque : physiquement, cela signifie que si  $\omega$  est trop importante, le ressort n'arrive plus à retenir  $M$ , il s'allonge et finit par couper ou alors, quand les spires du ressort sont complètement détendues, l'expression de  $\vec{F}$  n'est plus valable (Cf. suite).

5. L'expression précédente n'est correcte que si  $\vec{F}$  est elle-même valable, c'est à dire si  $r - r_0 < \frac{r_0}{2}$  avec  $r = r_e$  d'après l'énoncé, soit

$$r_e < \frac{3}{2}r_0 \Rightarrow \frac{kr_0}{k - m\omega^2} < \frac{3}{2}r_0 \Rightarrow 2k < 3k - 3m\omega^2 \iff \omega^2 < \frac{k}{3m} \Rightarrow \omega < \omega_M = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_e$$

Q34

6. Si  $\omega = 0,8\omega_M = 6,51 \text{ rad.s}^{-1}$ , on  $\omega_M \simeq 0,58\omega_e \simeq 8,14 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $r_e = \frac{kr_0}{k - m\omega^2} \simeq 25,4 \text{ cm}$ .

### C. Mouvement hors équilibre

1. Pour déterminer  $\vec{R}$ , on reprend le même raisonnement qu'en B. : PFD sur  $M$  puis projection sur les mêmes axes, à ceci près que cette fois,  $r \neq Cte$  d'où le vecteur  $\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + 2\dot{r}\omega\vec{e}_\theta$ .

Le point  $M$  est soumis aux mêmes forces soit, d'après le PFD,  $m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R} + \vec{F}$  avec toujours  $R_r = 0$  car pas de frottement.

Par projection du PFD selon  $\vec{e}_z$ , on retrouve  $0 = -mg + R_z + 0$  d'où  $R_z = mg$  mais la projection suivant

Q35

$\vec{e}_\theta$  donne cette fois  $2m\dot{r}\omega = 0 + R_\theta + 0$  on en déduit  $\vec{R} = mg \cdot \vec{e}_z + 2m\dot{r}\omega \cdot \vec{e}_\theta$ .

**Eh oui, PFD puis projection**

2. Cette fois  $\vec{R}$  la composante  $R_\theta$  n'est pas nulle,  $\vec{R}$  n'est donc plus normale au plan du mouvement, elle travaille ce qui implique une variation de l'énergie mécanique. En pratique on maintient  $\dot{\theta}$  constant en utilisant un moteur.

Q36

3. L'équation différentielle s'obtient par projection du PFD selon  $\vec{e}_r$  :

$$m(\ddot{r} - r\omega^2) = -k(r - r_0) \Rightarrow \ddot{r} + \frac{k - m\omega^2}{m}r = \frac{kr_0}{m}$$

et comme  $\omega = 0,4\omega_M < \omega_M < \omega_e$ , on a  $k - m\omega^2 > 0$  : les coefficients de cette équation sont bien de même signe et  $M$  va osciller autour de  $r_e$  (second membre).

Q37

**PFD puis projection**

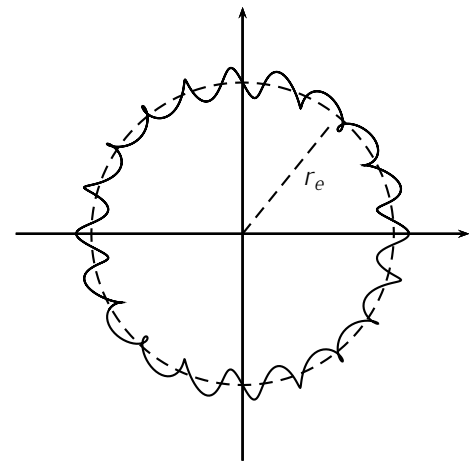
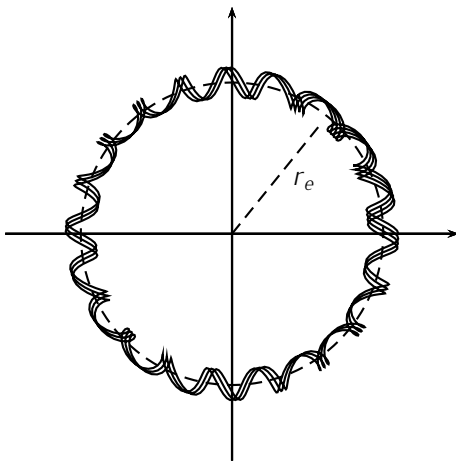
4. En posant  $x = r - r_e \Rightarrow \ddot{r} = \ddot{x}$  dans l'équation précédente, on en déduit

$$\ddot{x} + \frac{k - m\omega^2}{m}(x + r_e) = \frac{kr_0}{m} \text{ avec } r_e = \frac{kr_0}{k - m\omega^2}$$

cette équation se simplifie et on obtient finalement  $\ddot{x} + \frac{k - m\omega^2}{m}x = 0 \iff \ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = 0$ .

**On a fait disparaître la constante de l'équation différentielle en décalant l'origine du déplacement mesuré**

5. L'équation précédente est caractéristique d'oscillations à la pulsation  $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$  autour de  $x = 0$  soit  $r = r_e$ , la trajectoire dans le référentiel lié au sol est donc la combinaison d'un MCU et d'un mouvement sinusoïdal, soit en coordonnées polaires,  $r$  de la forme :  $r = r_e(1 + d \cos \Omega t)$  et  $\theta = \omega t$ . Sur la figure de gauche ci-dessous,  $d = 0,1r_e$  et  $\Omega = 20,1\omega$ .

**Quelques discussions plus physiques**

6. On a  $\Omega^2 = \frac{k}{m} - \omega^2 = \omega_e^2 - \omega^2 > 0$  car  $\omega = 0,4\omega_M < \omega_e$ , on peut donc calculer

$$\Omega = \sqrt{\omega_e^2 - \omega^2} \simeq 13,7 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_e^2 - \omega^2}} \simeq 0,46 \text{ s.}$$

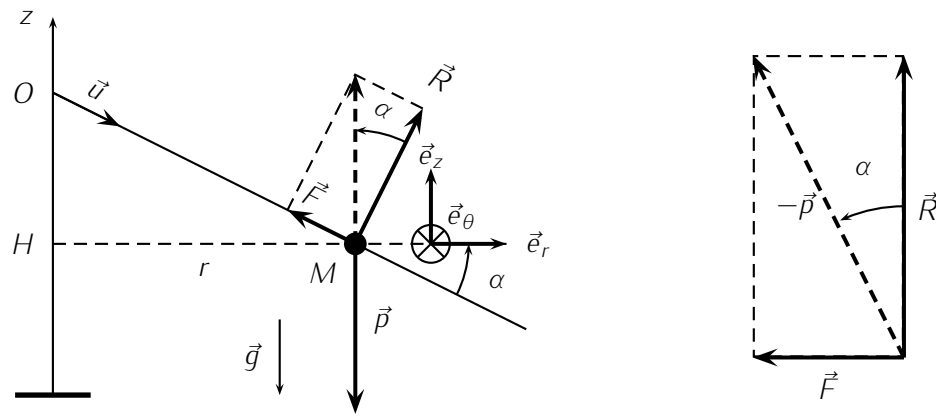
- Si  $\omega = 0$ , on retrouve  $\Omega = \omega$ , c'est le cas classique d'un ressort horizontal.
- Il faut que  $\Omega$  reste inférieur à  $\Omega_M$  car sinon l'expression de  $\vec{F}$  n'est plus la même, or,  $\omega_M < \omega_e$  ce qui interdit le cas  $\Omega \geq \omega_e$  : plus d'oscillation car les coefficients de l'équation ne sont plus de même signe.

7. Pour que la trajectoire de  $M$  dans le référentiel local soit une courbe fermée, il faut  $M$  fasse un nombre  $n$  entier d'oscillations pendant que la tige fait un tour (période de rotation  $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$ ), il faut donc que  $T = n\Delta t \iff \frac{2\pi}{\Omega} = n\frac{2\pi}{\omega}$  d'où  $\omega = n\Omega$ .

Cette situation est représentée ci-dessus à droite avec  $\Omega = 20\omega$ .

**D. Un petit penchant pour la difficulté ?**

1. Équilibre dans le référentiel lié au sol.  
Pour plus de lisibilité, le ressort n'est pas représenté sur la figure



*Bilan des forces et figure, la projection est ici superflue, car on peut travailler directement dans un triangle rectangle. Classique dans le cas de l'équilibre d'un système soumis à trois forces dont deux sont perpendiculaires.*

- (a) Le système étant à l'équilibre dans le référentiel considéré comme galiléen, on peut appliquer le principe d'inertie au système  $\{ M \}$  soumis à  $\vec{p}$ ,  $\vec{R}$  et  $\vec{F}$  :

$$\vec{p} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{p} = \vec{R} + \vec{F}$$

Dans le triangle rectangle on lit alors simplement

$$\sin \alpha = \frac{F}{p} = \frac{k(l_1 - l_0)}{mg} \Rightarrow l_1 = l_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k} \simeq 24,5 \text{ cm.}$$

- (b) En travaillant à nouveau dans le triangle rectangle,

$$\cos \alpha = \frac{R}{p} \Rightarrow R = mg \cos \alpha \simeq 0,4 \text{ N et } \vec{R} = mg \cos \alpha (\cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_z)$$

par projection dans la base cylindropolaire,

2. Si  $\omega = Cte$ ,  $M$  est en MCU de rayon  $r_2 = l_2 \cos \alpha$  et son accélération est  $\vec{a} = -\omega^2 r_2 \vec{e}_r$  dans le référentiel lié au sol galiléen.

Le PFD  $m\vec{a} = \vec{R} + \vec{p} + \vec{F}$  nous donne donc, par projection sur  $\vec{u}$  le vecteur unitaire  $\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{OM}$  (voir figure) :

$$-m\omega^2 r_2 \cos \alpha = 0 + mg \sin \alpha - k(l_2 - l_0)$$

avec  $r_2 = l_2 \cos \alpha$ , soit après simplification,  $l_2 = \frac{mg \sin \alpha + kl_0}{k - m\omega^2 \cos^2 \alpha} \simeq 22,7 \text{ cm}$

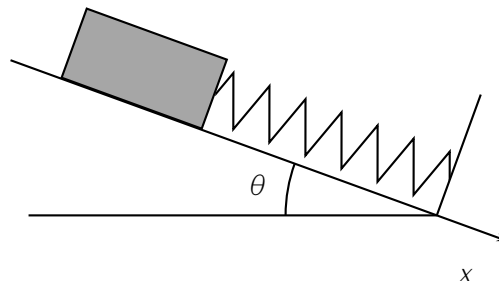
Si  $\alpha = 0$ , on retrouve bien  $l_2 = l_e = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}$  comme dans la première partie.

Q41



## HYSTÉRÉSIS DE FROTTEMENT

### 0.2 Hystérésis de frottement



- Q42 1.  $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$ . Vérification du signe : si  $x > 0$ , le ressort est comprimé, on s'attend donc à ce qu'il repousse la masse, c'est-à-dire que la force soit selon  $-\vec{e}_x$ . Or si  $x > 0$ , alors  $-kx\vec{e}_x$  est effectivement selon  $-\vec{e}_x$ , ce qui est cohérent.
2. Système : la masse ; Référentiel : terrestre (galiléen pour ce type d'étude) ; Bilan des efforts : Poids, force du ressort et réaction normale et tangentielle. On définit l'axe  $y$  orthogonal à  $x$  de façon à ce que le repère soit orthonormé direct.
- Principe fondamental de la statique :  $\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}$
- Q43 Par projection selon  $Ox$ ,  $-kx + T_x = 0$  et selon  $Oy$   $-P + N = 0$ . On en déduit  $T = |kx| = k|x|$  et  $N = P$ .
- Q44 3.  $T \leq \mu_s N \Rightarrow |x| \leq \mu_s \frac{P}{k}$ . L'intervalle est donc  $\left[-\mu_s \frac{P}{k}; +\mu_s \frac{P}{k}\right]$ .
4. Le bilan est le même, la projection selon  $Ox$  donne  $-kx + T_x + P = 0$ , la projection selon  $y$  donne  $N = 0$ .
- Q45 Or  $0 \leq T \leq \mu_s N = 0$  d'où  $T = 0$ . On en déduit que la seule position pour  $x$  est  $\frac{P}{k}$ .

*Attention, vous ne connaissez a priori pas le sens de la force  $\vec{T}$ , il ne faut pas en présupposer un, d'où  $T_x$  et non  $+T$  ou  $-T$ . Dans tout les cas, il faut prendre la norme pour répondre à la question, d'où la valeur absolue !*

5.  $\vec{T} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}$
- Q46 Par projection selon  $Ox$ ,  $-kx + T_x + P \sin \theta = 0$  et selon  $Oy$   $-P \cos \theta + N = 0$ . On en déduit  $T = |T_x| = |kx - P \sin \theta|$  et  $N = P \cos \theta$ .
- Q47 6.  $x = 0$  donc  $T = P \sin \theta$  et  $N = P \cos \theta$  d'après la question précédente. On va avoir glissement à partir de  $\theta_1^+$  tel que  $T = \mu_s N$ , c'est-à-dire  $P \sin \theta_1^+ = \mu_s P \cos \theta_1^+$  soit  $\theta_1^+ = \arctan(\mu_s)$ .
- Q48 7. Selon  $Ox$  à l'équilibre, le bilan des forces donne :  $-kx_1^+ + P \sin \theta_1^+ = 0$  d'où  $x_1^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_1^+$ .
8.  $T = |T_x| = |kx_1^+ - P \sin \theta|$  et  $N = P \cos \theta$  d'après la question 5.  
 or d'après la question précédente, on connaît  $x_1^+$  en fonction de  $\theta_1^+$ , on en déduit  $T = P(\sin \theta - \sin \theta_1^+)$  (signe inversé à cause de la valeur absolue et parce que sinus est une fonction croissante et  $\theta > \theta_1^+$  puisque l'on augmente les  $\theta$ ).
- Le nouveau glissement est obtenu pour  $\theta_2^+$  tel que  $T = \mu_s N \Leftrightarrow P(\sin \theta_2^+ - \sin \theta_1^+) = \mu_s P \cos \theta_2^+$  soit
- Q49  $\sin \theta_2^+ - \sin \theta_1^+ = \mu_s \cos \theta_2^+$ .

9. Supposons que la masse vienne de s'arrêter à  $x_i^+$  pour un angle  $\theta_i^+$ , on continue à augmenter  $\theta$ . D'après la question 5,  $T = |T_x| = |kx_i^+ - P \sin \theta|$ , or d'après un raisonnement exactement identique à celui de la question 7,  $x_i^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_i^+$ , d'où  $T = |P \sin \theta_i^+ - P \sin \theta| = P(\sin \theta - \sin \theta_i^+)$ . Le glissement apparaît en  $\theta_{i+1}^+$  lorsque  $T = \mu_s N = \mu_s P \cos \theta_{i+1}^+$  soit

$$\sin \theta_{i+1}^+ - \sin \theta_i^+ = \mu_s \cos \theta_{i+1}^+.$$

$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  donc  $\cos \theta_{i+1}^+ \rightarrow 0$  donc  $\sin \theta_{i+1}^+ - \sin \theta_i^+ \rightarrow 0$ , sinus étant bijective sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ ,

$\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+$  tend vers 0, ce qui est cohérent avec une seule position d'équilibre possible en  $\theta = \frac{\pi}{2}$  comme établi à la question 4.

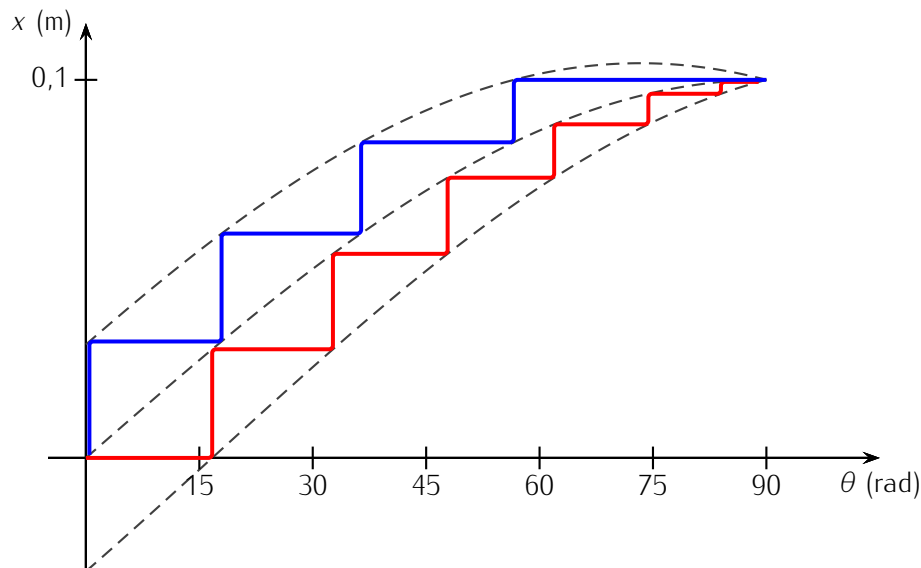
10. Les équations sont les mêmes, seul le signe de la valeur absolue change. Ainsi l'équilibre en  $i+1$  se déduit de celui en  $i-1$  toujours par l'égalité :  $|P \sin \theta_i^- - P \sin \theta_{i+1}^-| = \mu_s P \cos \theta_{i+1}^-$  mais cette fois  $\theta$  décroît et

donc  $\theta_i^- > \theta_{i+1}^-$  d'où  $\sin \theta_i^- - \sin \theta_{i+1}^- = \mu_s \cos \theta_{i+1}^-$  et de même que précédemment  $x_i^- = \frac{P}{k} \sin \theta_i^-$ .

11.  $x_i^- = \frac{P}{k} \sin \theta_i^-$  et  $x_i^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_i^+$ , on peut donc les placer sur la courbe d'équation  $x = \frac{P}{k} \sin \theta$ .

De plus  $\sin \theta_i^- - \sin \theta_{i+1}^- = \mu_s \cos \theta_{i+1}^- \Rightarrow \frac{k}{P} x_i^- - \sin \theta_{i+1}^- = \mu_s \cos \theta_{i+1}^-$  d'où  $x_i^- = \frac{P}{k} (\sin \theta_{i+1}^- + \mu_s \cos \theta_{i+1}^-)$ , les points  $(x_i^-, \theta_{i+1}^-)$  appartiennent donc à la courbe  $x = \frac{P}{k} (\sin \theta + \mu_s \cos \theta)$

De même  $\sin \theta_{i+1}^+ - \sin \theta_i^+ = \mu_s \cos \theta_{i+1}^+$  d'où les points  $(x_i^+, \theta_{i+1}^+)$   $x = \frac{P}{k} (\sin \theta - \mu_s \cos \theta)$



La courbe en pointillé au milieu est celle d'équation  $x = P/k \sin \theta$ . La courbe en zigzag en dessous représente les paliers de  $[\theta_i^+, \theta_{i+1}^+]$  (palier horizontal) et le glissement de  $x_i^+$  vers  $x_{i+1}^+$  (palier vertical). La courbe en zigzag au dessus représente l'équivalent à la descente.

On peut remarquer que le « chemin » employé, c'est-à-dire la succession des  $x_i$  n'est pas la même dans un sens et dans l'autre. On parle alors d'hystérésis.