DEVOIR SURVEILLÉ 4 - 09/01/26 - *Durée 4h*

Sujet 1 - Type CCINP

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Rappel des consignes

- ⋆ Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- ⋆ Ne pas utiliser de correcteur.
- ⋆ Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1 : Étude d'un endomorphisme matriciel

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi_A : M \mapsto AM$.
En particulier, on remarque qu'en notant O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice d'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors φ_{O_n} est l'application nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_{I_n} est l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_A.

Partie I - Généralités

Q1. Montrer pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'application φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2. Montrer pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ que $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

Q3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de la question précédente que φ_A est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible. **Indication :** si φ_A est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par φ_A de la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie II - Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On considère un nombre $a \in \mathbb{C}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Q4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $a \in \mathbb{C}$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

Q5. Déterminer la matrice de φ_A dans la base $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Q6. En déduire la valeurs propres de φ_A, puis déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de φ_A en fonction de $a \in \mathbb{C}$.

Q7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que φ_A soit diagonalisable.

Partie III - Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A.

Q8. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.

Q9. En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

Q10. Rappeler la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur. En déduire que la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

Q11. On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer que $\chi_A(\varphi_A)$ est l'endomorphisme nul. En déduire une inclusion entre l'ensemble des valeurs propres de A et l'ensemble des valeurs propres de φ_A, puis que la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes valeurs propres.

Q12. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ de φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si chaque colonne de la matrice M est dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de la matrice A pour la valeur propre λ.

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A, l'application Ψ qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe le n-uplet de ses colonnes :

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre de $E_\lambda(\varphi_A)$ sur $E_\lambda(A)^n$.

Q13. Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de φ_A en fonction du déterminant et de la trace de A.

Exercice 2 : Étude d'une famille de séries entières

Dans tout l'exercice, α désigne un nombre réel. On note $\mathscr{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathscr{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

Objectifs

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

Dans la Partie I, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.

L'objectif de la Partie II est de construire un logarithme complexe.

Partie I - Quelques propriétés des fonctions f_α

Q14. Donner le rayon de convergence commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

Q15. Montrer que :

a) si $\alpha \in]-\infty, 0]$ alors $\mathscr{D}_\alpha =]-1, 1[$,
b) si $\alpha \in]0, 1]$ alors $\mathscr{D}_\alpha = [-1, 1[$,
c) si $\alpha \in]1, +\infty[$ alors $\mathscr{D}_\alpha = [-1, 1]$.

Q16. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathscr{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Q17. Déterminer f_0 et montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ et } f_1(x) = -\ln(1-x).$$

Q18. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $[-1, 1]$.

Q19. Soit $\alpha \leqslant 1$. Prouver que $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer f_α à f_1.*

Partie II - Un logarithme complexe

Q20. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note : $S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$.

Q21. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S.
Pour tout x réel élément de $]-R, R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.
On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q22. On note r le rayon de convergence de la série entière définissant g.
Montrer que si $z_0 = 0$ alors $r = +\infty$ et si $z_0 \neq 0$ alors $r = \dfrac{1}{|z_0|}$.

Q23. Prouver que g est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.
Déterminer $g'(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Q24. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0} h(t).$$

Q25. Montrer que la fonction $t \mapsto 1 + tz_0$ est une solution de l'équation différentielle $y'(t) = \dfrac{z_0}{1 + tz_0} y(t)$ sur $[0,1]$. En déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Exercice 3 : Un développement en série entière

Soit ψ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x(\sin t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

Q26. Montrer que la fonction ψ est bien définie sur $[-1,1]$.

Q27. Montrer que pour tout $u \in]-1,1[$, on a $\sqrt{1+u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n$.

Q28. Montrer que ψ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{2}{\pi} I_n x^n$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n}\, \mathrm{d}t$.

Q29. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$.

Q30. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 4 : Une équation différentielle

On considère l'équation (E) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 y''(x) + xy'(x) - (x^2 + x + 1)y(x) = 0$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Q31. Soit y de classe $\mathcal{C}^2$ une solution de (E). Calculer $y(0)$.

On cherche une solution f de (E) développable en série entière et telle que $f'(0) = 1$.
On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que, $\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Q32. Montrer que l'on a :

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 2,\ (n^2 - 1)a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Q33. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que : $\forall n \geqslant 1,\ |a_n| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.

Q34. Justifier alors que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de (E). On pose, pour tout x réel, $z(x) = xy(x)e^x$.

Q35. Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.

Q36. Prouver que z' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$xu'(x) - (2x+1)u(x) = 0 \quad (F)$$

d'inconnue la fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Q37. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$u' - \left(2 + \frac{1}{x}\right)u = 0.$$

On admet que les seules solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier sont les fonctions de la forme $x \mapsto cxe^{2x}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Q38. Démontrer qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = a(2x-1)e^{2x} + a.$$

Q39. Déterminer alors une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.