

Fiche n° 11. Intégration par parties

Réponses

11.1 a) $\frac{\pi}{2} - 1$

11.1 b) $\frac{5}{2}\text{ch}(2) - \frac{1}{2}\text{sh}(2) - \frac{3}{2}$

11.1 c) 4

11.1 d) $\frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2 \ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$

11.1 e) 1

11.1 f) $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$

11.1 g) $\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$

11.1 h) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

11.1 i) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

11.1 j) $-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$

11.1 k) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$

11.1 l) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$

11.2 a) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)e^x \end{cases}$

11.2 b) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1+\ln x}{x} \end{cases}$

11.2 c) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{cases}$

11.2 d) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \text{sh}(x) - \text{ch}(x) \end{cases}$

11.3 a) $\frac{5}{2} - e^2$

11.3 b) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$

11.4 a) ... $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}(-\cos(x)\text{sh}(x) + \sin(x)\text{ch}(x)) \end{cases}$

11.4 b) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \end{cases}$

11.4 c) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \left(\frac{1}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} \ln x + \frac{2}{27} \right) \end{cases}$

11.4 d) .. $\begin{cases}]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} e^{\arccos(x)} (x - \sqrt{1-x^2}) \end{cases}$

Corrigés

11.1 a) On choisit $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt = [t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2} - 1$.

11.1 b) On choisit $u'(t) = \text{sh}(2t)$ et $v(t) = 2t + 3$. $\int_0^1 (2t+3)\text{sh}(2t) \, dt = \left[(2t+3) \frac{\text{ch}(2t)}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \text{ch}(2t) \, dt = \frac{5}{2}\text{ch}(2) - \frac{3}{2} - \frac{\text{sh}(2)}{2}$.

11.1 c) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = e^{\frac{t}{2}}$. $\int_0^2 t e^{\frac{t}{2}} \, dt = \left[2t e^{\frac{t}{2}} \right]_0^2 - 2 \int_0^2 e^{\frac{t}{2}} \, dt = 4e - 4 \left[e^{\frac{t}{2}} \right]_0^2 = 4$.

11.1 d) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = 2^t$. $\int_1^{\ln(2)} t 2^t \, dt = \int_1^{\ln(2)} t e^{t \ln(2)} \, dt = \left[t \frac{1}{\ln(2)} 2^t \right]_1^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{\ln(2)} e^{t \ln(2)} \, dt = 2^{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2} [2^t]_1^{\ln(2)} = \frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2 \ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$.

11.1 e) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. $\int_1^e \ln t \, dt = [t \ln t]_1^e - \int_1^e 1 \, dt = e - (e-1) = 1$.

11.1 f) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$. $\int_1^2 t \ln t \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \ln t \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} t \, dt = 2 \ln 2 - \frac{1}{4} [t^2]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.

11.1 g) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$. $\int_0^1 \ln(1+t^2) \, dt = [t \ln(1+t^2)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \, dt = \ln(2) - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \, dt = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$.

11.1 h) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t \arctan t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \arctan t \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \, dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) \, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

11.1 i) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arcsin t$. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t \, dt = [t \arcsin t]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \frac{\pi}{12} + \left[\sqrt{1-t^2} \right]_0^{\frac{1}{2}}$.

11.1 j) On choisit $u'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} \, dt = [2t\sqrt{1+t}]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{1+t} \, dt = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} [(1+t)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$.

11.1 k) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) \, dt = \left[\frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \ln(1+t) \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 \sqrt{1+t} \, dt = \frac{4}{3} \sqrt{2} \ln(2) - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \sqrt{2} \ln(2) - \frac{8}{9} \sqrt{2} + \frac{4}{9}$.

11.1 l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t(1 + \tan^2 t) \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \, dt$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1 + \tan^2 t$. On obtient $[t \tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln \cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.

11.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = e^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\int_0^x (-t+1)e^t \, dt = [(-t+1)e^t]_0^x + \int_0^x e^t \, dt = (-x+1)e^x + e^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)e^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)e^x$.

11.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \frac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} \, dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} \, dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\frac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f .

11.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\int_0^x \arctan(t) \, dt = [t \arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \, dt = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

11.2 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en choisissant $v(t) = t$ et $u'(t) = \operatorname{ch} t$, $\int_0^x t \operatorname{ch}(t) \, dt = [t \operatorname{sh}(t)]_0^x - \int_0^x \operatorname{sh}(t) \, dt = x \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) + 1$. D'où une primitive.

11.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = e^{2t}$ et $v(t) = t^2 + 3t - 4$ et ainsi $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} \, dt = \left[(t^2 + 3t - 4) \frac{e^{2t}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 (2t + 3) \frac{e^{2t}}{2} \, dt$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t) = 2t + 3$ et $u'(t) = \frac{e^{2t}}{2}$ d'où $:- \int_0^1 (2t + 3) \frac{e^{2t}}{2} \, dt = 2 - \left[(2t + 3) \frac{e^{2t}}{4} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2t} \, dt = \frac{11}{4} - \frac{5}{4} e^2 + \frac{1}{4} [e^{2t}]_0^1 = \frac{5}{2} - e^2$.

11.3 b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$; d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t \, dt = [e^t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t \, dt$. Ensuite $u' = \exp$ et $v = \cos$, d'où : $e^{\frac{\pi}{2}} - [e^t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t \, dt$. Finalement, $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t \, dt = e^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

11.4 a) On effectue deux intégrations par parties successives pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \sin(t) \operatorname{sh}(t) \, dt$. On commence par choisir $u' = \sin$ et $v = \operatorname{sh}$ cela donne $\int_0^x \sin(t) \operatorname{sh}(t) \, dt = [-\cos(t) \operatorname{sh}(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t) \operatorname{ch}(t) \, dt$. Puis, on choisit $u' = \cos$ et $v = \operatorname{ch}$, ce qui donne $-\cos(x) \operatorname{sh}(x) + [\sin(t) \operatorname{ch}(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t) \operatorname{sh}(t) \, dt$. Finalement, $\int_0^x \sin(t) \operatorname{sh}(t) \, dt = \frac{1}{2}(-\cos(x) \operatorname{sh}(x) + \sin(x) \operatorname{ch}(x))$.

11.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\int_1^x \ln^2 t \, dt = [t \ln^2 t]_1^x - \int_1^x 2 \ln t \, dt$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $x \ln^2 x - 2[t \ln t]_1^x + 2 \int_1^x 1 \, dt = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

11.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\int_1^x t^2 \ln^2 t \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \ln^2 t \right]_1^x - \frac{2}{3} \int_1^x t^2 \ln t \, dt$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\frac{x^3}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} [t^3 \ln t]_1^x + \frac{2}{9} \int_1^x t^2 \, dt = \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2}{9} x^3 \ln x + \frac{2}{27} (x^3 - 1)$. D'où une primitive.

11.4 d) La fonction est définie et continue sur $] -1, 1[$. Si $x \in] -1, 1[$, alors, en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^{\arccos(t)}$, on obtient $\int_0^x e^{\arccos(t)} \, dt = [te^{\arccos(t)}]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} e^{\arccos(t)} \, dt$, ensuite, en posant $u'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et $v(t) = e^{\arccos(t)}$, on obtient $xe^{\arccos(x)} - \left[\sqrt{1-t^2} e^{\arccos(t)} \right]_0^x + \int_0^x \sqrt{1-t^2} \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} e^{\arccos(t)} \, dt = xe^{\arccos(x)} - \sqrt{1-x^2} e^{\arccos(x)} + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^x e^{\arccos(t)} \, dt$. D'où $\int_0^x e^{\arccos(t)} \, dt = \frac{1}{2} e^{\arccos(x)} (x - \sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}}$.

Fiche n° 12. Changements de variable

Réponses

12.1 a).....	$\frac{\pi}{2}$	12.2 e).....	$\frac{\pi}{12}$
12.1 b).....	$\frac{\pi}{6}$	12.2 f).....	$\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$
12.1 c).....	$2 \arctan(e) - \frac{\pi}{2}$	12.3 a).....	$2e^2$
12.1 d).....	$\frac{1}{4}$	12.3 b).....	$-2((\sqrt{3}-1) \ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3})$
12.1 e).....	$\frac{1}{12}$	12.4 a).....	$\begin{cases}]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x + \ln \tan(x) \end{cases}$
12.1 f).....	$2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$	12.4 b).....	$\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} \end{cases}$
12.2 a).....	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	12.4 c).....	$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) \end{cases}$
12.2 b).....	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2e+1}{3}\right)$	12.4 d).....	$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{cases}$
12.2 c).....	$\frac{\pi}{2}$	12.4 e).....	$\begin{cases}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$
12.2 d).....	$\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$		

Corrigés

12.1 a) On pose $t = \sin \theta$ avec $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$ et donc

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

12.1 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1, 3]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1, \sqrt{3}]$. On a $\frac{dt}{du} = 2u$ et donc $dt = 2u du$. Ainsi,

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u}{u + u^3} du = 2 \left[\arctan u \right]_1^{\sqrt{3}} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

12.1 c) On pose $u = e^t$ avec $t \in [0, 1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1, e]$. On a $\frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$ et donc $dt = \frac{du}{u}$. On obtient

$$\int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt = \int_0^1 \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt = \int_1^e \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = 2 \int_1^e \frac{1}{1+u^2} du = 2 \left[\arctan u \right]_1^e = 2 \arctan(e) - \frac{\pi}{2}.$$

12.1 d) On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\frac{du}{dt} = \cos t$ et donc $du = \cos t dt$. Ainsi, $\int_0^1 u^3 du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$.

Finalement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt = \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

12.1 e) Remarquons qu'on a $\cos^3 t = (1 - \sin^2 t) \cos t$. On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\frac{du}{dt} = \cos t$ donc $du = \cos t dt$. Ainsi, $\int_0^1 u^3(1 - u^2) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt = \left[\frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{6} u^6 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

12.1 f) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1, 4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1, 2]$. On a $\frac{dt}{du} = 2u$.

Ainsi, $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt = \int_1^2 \frac{2u}{u^2 + u} du = 2 \int_1^2 \frac{1}{1 + u} du = 2 \left[\ln(1 + u) \right]_1^2 = 2(\ln(3) - \ln(2))$.

12.2 a) On pose $u = \cos t$ avec $t \in [0, \pi]$. On a $\frac{du}{dt} = -\sin t$. Ainsi, $\int_{-1}^1 \frac{1}{3 + u^2} du = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ et finalement,

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{u}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

12.2 b) On pose $u = e^t$ avec $t \in [0, 1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1, e]$. On a $\frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$ donc $dt = \frac{1}{u} du$.

Finalement, $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt = \int_1^e \frac{1}{2 + \frac{1}{u}} \frac{1}{u} du = \int_1^e \frac{1}{2u + 1} du = \left[\frac{1}{2} \ln(2u + 1) \right]_1^e = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2e + 1}{3}\right)$.

12.2 c) On pose $u = \frac{1}{2}t - 1$ avec $t \in [2, 4]$, donc $t = 2u + 2$ et $u \in [0, 1]$. On a donc $dt = 2 du$.

Ainsi, $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t - t^2}} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - 4u^2}} du = \left[\arcsin u \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

12.2 d) On pose $t = \tan u$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\frac{dt}{du} = (1 + \tan^2 u)$.

Ainsi, $\int_0^1 \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2u) + 1}{2} du = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

12.2 e) On pose $u = \frac{1}{t}$ avec $t \in [\sqrt{2}, 2]$. On a $\frac{dt}{du} = -\frac{1}{u^2}$.

Ainsi, $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt = - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}} \frac{1}{u^2} du = - \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = - \left[\arcsin u \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12}$.

12.2 f) On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [e, e^2]$, donc $t = e^u$ et $u \in [1, 2]$. On a $\frac{dt}{du} = e^u$ et

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt = \int_1^2 \frac{u}{1 + u^2} du = \left[\frac{1}{2} \ln(1 + u^2) \right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}.$$

12.3 a) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1, 4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [1, 2]$.

On a alors $\frac{dt}{du} = 2u$ d'où $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt = \int_1^2 2ue^u du$. Cette nouvelle intégrale peut se calculer en faisant une intégration par parties. On trouve : $\int_1^2 2ue^u du = \left[2ue^u \right]_1^2 - \int_1^2 2e^u du = 2e^2$.

12.3 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [3, 4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [\sqrt{3}, 2]$.

On a alors $\frac{dt}{du} = 2u$ d'où $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t} - 1)}{\sqrt{t}} dt = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\ln(u - 1)}{u} 2u du = 2 \int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u - 1) du$.

On fait maintenant une intégration par parties :

$$2 \int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u - 1) du = 2 \left[(u - 1) \ln(u - 1) \right]_{\sqrt{3}}^2 - 2 \int_{\sqrt{3}}^2 du = -2((\sqrt{3} - 1) \ln(\sqrt{3} - 1) - 4 + 2\sqrt{3}).$$

12.4 a) La fonction est bien continue. Soit $(a, x) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2$.

On calcule $\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t} dt$ qui est aussi $\int_a^x \frac{1 + \frac{\sin t}{\cos t}}{\cos^2 t} dt$ en posant $u = \tan t$.

On a $\frac{1}{\cos^2 t} dt = du$ et, ainsi, $\int_a^x \frac{\cos t + \sin t}{\sin t \cos^2 t} dt = \int_{\tan a}^{\tan x} \left(1 + \frac{1}{u}\right) du = \left[u + \ln u\right]_{\tan a}^{\tan x} = \tan x + \ln \tan(x) + C$.

12.4 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à

$\int_0^x \frac{1}{1 + \text{th}(t)} dt$ dans laquelle on pose $u = e^t$ c'est-à-dire $t = \ln u$. On a donc $\frac{dt}{du} = \frac{1}{u}$ et ainsi

$$\int_0^x \frac{1}{1 + \text{th}(t)} dt = \int_1^{e^x} \frac{1}{1 + \frac{u - \frac{1}{u}}{u + \frac{1}{u}}} \frac{1}{u} du = \int_1^{e^x} \frac{1}{2u} + \frac{1}{2u^3} du = \left[\frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{4} \frac{1}{u^2}\right]_1^{e^x} = \frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

On pouvait aussi faire sans changement de variable en écrivant, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1 + \text{th}(t)} = \frac{1}{1 + \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}} = \frac{e^t + e^{-t}}{2e^t} = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t}).$$

12.4 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{e^t - 1}$, on a $t = \ln(1 + u^2)$ et ainsi, $\frac{dt}{du} = \frac{2u}{1 + u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{1}{u} \frac{2u}{1 + u^2} du = 2 \left[\arctan u \right]_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} = 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) + C$.

12.4 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\frac{dt}{du} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t + \sqrt[3]{t}} dt = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3 + u} du = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2 + 1} du = \left[\frac{3}{2} \ln(u^2 + 1)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) + C.$$

12.4 e) La fonction est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2 - 1}$ donne $t = \sqrt{u^2 + 1}$ et ainsi, $\frac{dt}{du} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2+1}} \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} du = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan \sqrt{x^2 - 1} + C.$$