CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 4 (sujet 1)

EXERCICE 1 – Étude d'un endomorphisme matriciel (d'après CCINP 2025 PC)

Partie I – Généralités

Q1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Puisque le produit de deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est bien défini, et est dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, φ_A est correctement définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
De plus, pour tout $(M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$:

$$\varphi_A(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N) = \lambda AM + \mu AN = \lambda \varphi_A(M) + \mu \varphi_A(N)$$

φ est donc une application linéaire définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2. Pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\varphi_A \circ \varphi_B(M) = \varphi_A(\varphi_B(M)) = \varphi_A(BM) = A(BM) = (AB)M = \varphi_{AB}(M),$$

et donc $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

Q3. ⇢ Si A est inversible, alors, d'après **Q2.**, $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_{\mathrm{I}_n} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, et, de même, $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
Par conséquent, φ_A est bijective, et sa réciproque est $\varphi_{A^{-1}}$.

⇢ Réciproquement, supposons $\varphi_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ bijective.
En particulier, la matrice I_n possède un unique antécédent par φ_A : il existe une unique matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\varphi_A(B) = \mathrm{I}_n$. Cette dernière égalité se récrit $AB = \mathrm{I}_n$, ce qui justifie que A est inversible (et que B est son inverse).

Partie II – Étude d'un exemple

Q4. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 0 & X-a \end{vmatrix} = (X-1)(X-a)$, donc deux situations se présentent :

⇢ si $a \neq 1$, alors A possède exactement deux valeurs propres distinctes (à savoir a et 1), et puisque $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, A est diagonalisable ;

⇢ si $a = 1$, alors A possède 1 pour unique valeur propre, et si A était diagonalisable, alors il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $A = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times P^{-1} = PP^{-1} = \mathrm{I}_2$.
Puisque $A \neq \mathrm{I}_2$, cette conclusion est fausse, et A ne peut donc pas être diagonalisable lorsque $a = 1$.

Par conséquent, A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

Q5. On note $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On calcule les images des éléments de $\mathcal{C}$ par φ :

$$\begin{cases} \varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + 0E_{2,2} \\ \varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} + 1E_{1,2} + 0E_{2,1} + 0E_{2,2} \\ \varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = 1E_{1,1} + 0E_{1,2} + aE_{2,1} + 0E_{2,2} \\ \varphi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = 0E_{1,1} + 1E_{1,2} + 0E_{2,1} + aE_{2,2} \end{cases}$$

et on en déduit que $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Q6. Puisque la matrice précédente est triangulaire supérieure, on montre rapidement que $\chi_{\varphi_A} = (X-1)^2(X-a)^2$, et donc $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \{1, a\}$.

De plus, $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (quelle que soit la valeur de a puisque les colonnes C_1 et C_2 sont nulles et les colonnes C_3 et C_4 ne sont pas colinéaires) donc par la formule du rang, $\dim(E_1(\varphi_A)) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C})) - \mathrm{rg}(\varphi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}) = 2$.

De même, $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\varphi_A - a\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}) = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (car C_3 et C_4 ne sont pas colinéaires, C_1 est colinéaire à C_3 et C_2 est colinéaire à C_4), donc $\dim(E_a(\varphi_A)) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A - a\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})) = 2$.

Q7. ⇢ Si $a \neq 1$, φ_A possède deux valeurs propres distinctes, à savoir 1 et a, et puisque $\dim(E_1(\varphi_A)) + \dim(E_a(\varphi_A)) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C}))$, φ_A est diagonalisable.

⇢ Si $a = 1$, alors φ_A possède 1 pour unique valeur propre, et comme $\dim(E_1(\varphi_A)) = 2 \neq 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{C}))$, φ_A n'est pas diagonalisable.

Finalement, φ_A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

Partie III – Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Q8. On a vu en **Q2.** que, pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.
En particulier, $\varphi_A^2 = \varphi_{A^2}$.
On en déduit rapidement, par récurrence, que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.
Par ailleurs, $\varphi_{A^0} = \varphi_{\mathrm{I}_n} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})} = \varphi_A^0$: l'égalité ci-dessus demeure donc vraie lorsque $k = 0$.

Q9. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$: il existe $d \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$.

Pour toute $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$[P(\varphi_A)](M) = \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_A^k\right](M) = \left[\sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_{A^k}\right](M)}_{\text{d'après } \mathbf{Q8.}} = \sum_{k=0}^{d} a_k \varphi_{A^k}(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k M = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right) M = \varphi_{P(A)}(M)$$

On a ainsi montré que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

Q10. Une matrice (resp. un endomorphisme) est diagonalisable si et seulement si elle (resp. il) possède un polynôme annulateur scindé dont les racines sont toutes simples.

⇢ Si A est diagonalisable, alors il existe un polynôme P scindé dont les racines sont toutes simples tel que $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
Par conséquent, $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)} = \varphi_{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$: φ_A possède donc un polynôme annulateur dont les racines sont toutes simples (à savoir P) : φ_A est donc diagonalisable.

⇢ Réciproquement, supposons φ_A diagonalisable : il existe donc un polynôme P scindé dont les racines sont toutes simples tel que $P(\varphi_A) = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$, et donc $\varphi_{P(A)} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$.
Par conséquent, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $P(A) \times M = 0$. Cette égalité étant valable, en particulier, pour $M = \mathrm{I}_n$, on en déduit que $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$: A possède donc un polynôme annulateur dont les racines sont toutes simples (à savoir P), et donc A est diagonalisable.

Q11. D'après **Q9.**, $\chi_A(\varphi_A) = \varphi_{\chi_A(A)}$.
Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
Donc $\chi_A(\varphi_A) = \varphi_{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$.
Ainsi, χ_A est un polynôme annulateur de φ_A : on en déduit que les valeurs propres de φ_A sont parmi les racines de χ_A, qui sont les valeurs propres de A. Autrement dit, $\mathrm{Sp}(\varphi_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$.
D'autre part, toujours par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_{\varphi_A}(\varphi_A) = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$, et, d'après **Q9.**, $\chi_{\varphi_A}(\varphi_A) = \varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)}$.
Par conséquent, $\varphi_{\chi_{\varphi_A}(A)} = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))}$, et, en raisonnant comme à la fin de la question **Q10.**, on en déduit que $\chi_{\varphi_A}(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, puis, comme dans la démarche ci-dessus, on en déduit que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.
Finalement, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.

Q12. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M, de sorte que l'on peut écrire par blocs : $M = (C_1 \cdots C_n)$.

$$\begin{aligned}
M \in E_\lambda(\varphi_A) &\iff \varphi_A(M) = \lambda M \\
&\iff AM = \lambda M \\
&\iff A \times (C_1 \cdots C_n) = (\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\
&\iff (A \times C_1 \cdots A \times C_n) = (\lambda C_1 \cdots \lambda C_n) \\
&\iff \forall\, k \in [\![1\,;n]\!], A \times C_k = \lambda C_k \\
&\iff \forall\, k \in [\![1\,;n]\!], C_k \in E_\lambda(A)
\end{aligned}$$

Q13. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (deux à deux distinctes) de A, et $r_1, \dots, r_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ (comme tout polynôme non constant), on a $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{k=1}^{p} r_k \lambda_k$ et $\det(A) = \prod\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^{r_k}$.

De même, comme χ_{φ_A} est scindé sur $\mathbb{C}$, la trace de φ_A est la somme de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) et le déterminant de φ_A est le produit de ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).

De plus, d'après **Q11.**, $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et, d'après la remarque qui suit la question **Q12.**, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, les espaces $E_{\lambda_k}(\varphi_A)$ et $E_{\lambda_k}(A)^n$ sont isomorphes, donc $\dim(E_{\lambda_k}(\varphi_A)) = \dim\left(E_{\lambda_k}(A)^n\right) = n \dim(E_{\lambda_k}(A))$.

Puisque A est diagonalisable, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, $\dim(E_{\lambda_k}(A)) = r_k$, et donc $\dim(E_{\lambda_k}(\varphi_A)) = nr_k$.

Comme A est diagonalisable, φ_A aussi d'après **Q11.** donc pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, la multiplicité de la valeur preuve λ_k pour φ_A est égale à nr_k.

Par conséquent, $\mathrm{tr}(\varphi_A) = \sum\limits_{k=1}^{p} nr_k\lambda_k = n\sum\limits_{k=1}^{p} r_k\lambda_k = n\mathrm{tr}(A)$ et $\det(\varphi_A) = \prod\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^{nr_k} = \left(\prod\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^{r_k}\right)^n = \det(A)^n$.

EXERCICE 2 – Étude d'une famille de séries entières (d'après CCINP 2021 PSI)

Partie I – Quelques propriétés des fonctions f_n

Q14. On sait par le cours que le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^\beta x^n$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ est 1. En appliquant ce résultat avec $\beta = -\alpha$, on obtient que :

$$\boxed{\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R},\ R\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}\right) = 1.}$$

Q15. $\mathscr{D}_\alpha$ est l'ensemble de définition d'une somme de série entière de rayon de convergence égal à 1 donc d'après le cours, on a :

$$]-1,1[\subset \mathscr{D}_\alpha \subset [-1,1].$$

Il reste à discuter, selon la valeur de α, de la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

On sait que la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On en déduit que $1 \in \mathscr{D}_\alpha$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Étudions maintenant la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Si $\alpha \in]-\infty, 0]$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$ Comme la suite $\left(\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right|\right)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0 alors la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge donc grossièrement.

On peut donc déjà conclure que :

$$\boxed{a)\ \text{si } \alpha \in]-\infty, 0] \text{ alors } \mathscr{D}_\alpha =]-1, 1[.}$$

Si $\alpha \in]0, 1]$ alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant 0$. Comme la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 et est décroissante (car $\alpha > 0$), on en déduit par le critère spécial des séries alternées que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{b)\ \text{si } \alpha \in]0, 1] \text{ alors } \mathscr{D}_\alpha = [-1, 1[.}$$

Si $\alpha \in]1,+\infty[$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{c)\text{ si } \alpha \in]1,+\infty[\text{ alors } \mathscr{D}_\alpha = [-1,1].}$$

Q16. Soit $x \in \mathscr{D}_\alpha$.
Si $x \geqslant 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x^n}{n^\alpha} \geqslant 0$ donc par somme, $f_\alpha(x) \geqslant 0$.
Si $x < 0$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n(-x)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{(-x)^n}{n^\alpha} \geqslant 0$. Comme la suite $\left(\dfrac{|x|^n}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0 (comme $|x| \leqslant 1$, c'est le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0 puisque $\alpha > 0$) et est décroissante (en tant que produit de deux suites décroissantes et positives), on en déduit par le critère spécial des séries alternées que la somme $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est du signe de son premier terme donc $f_\alpha(x)$ est du signe de x donc $f_\alpha(x) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathscr{D}_\alpha,\ f_\alpha(x) \geqslant 0 \text{ si } x \geqslant 0 \text{ et } f_\alpha(x) \leqslant 0 \text{ si } x \leqslant 0.}$$

Q17. On sait par le cours (série géométrique) que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.}$$

On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

En tant que somme d'une série entière, on peut dériver $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence. On en déduit que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En multipliant par x, on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.}$$

On sait que pour tout $u \in]-1,1[$, $\ln(1+u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.
Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, comme $-x \in]-1,1[$, on a :

$$\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n x^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).}$$

Q18. Avec $]-1,1[$, il est facile de répondre à la question posée : en tant que somme d'une série entière, f_α est continue sur son intervalle ouvert de convergence donc f_α est continue sur $]-1,1[$ (et ceci est vrai pour tout réel α).
Dans le cas $\alpha > 1$, prouvons qu'elle est continue sur $[-1,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n^\alpha}$.
⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur $[-1,1]$ (fonction polynômiale).
⋆ On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]} = \displaystyle\sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|^n}{n^\alpha} = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$ par parité puis croissance de la fonction sur $[0,1]$.
Or, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ($\alpha > 1$).

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$.
Ainsi, par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions :

$$\boxed{\text{la fonction } f_\alpha \text{ est continue sur } [-1,1].}$$

Q19. Soit $x \in [0,1[$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < n^\alpha \leqslant n$ donc $\dfrac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{x^n}{n}$ (puisque $x^n \geqslant 0$) d'où par somme (séries convergentes) : $f_\alpha(x) \geqslant f_1(x)$.
Or, on sait que $f_1(x) = -\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.
Par inégalité, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty.}$$

Partie II – Un logarithme complexe

Q20. On sait par le cours que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n}.$$

Q21. On s'intéresse à la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \neq 0$ et :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/n+1}{1/n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par le critère de d'Alembert, on en déduit que :

$$\boxed{R = \frac{1}{1} = 1.}$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ \exp(S(x)) = 1+x.}$$

Q22. Si $z_0 = 0$ alors $r = R\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} 0t^n\right) = +\infty$ (série entière nulle, convergence pour tout réel t).
Si $z_0 \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (-1)^{n-1}\dfrac{z_0^n}{n} \neq 0$ et :

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{|z_0|^{n+1}/n+1}{|z_0|^n/n} = |z_0|\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z_0|.$$

Par le critère de d'Alembert, on en déduit que $r = \dfrac{1}{|z_0|}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si } z_0 = 0 \text{ alors } r = +\infty \text{ et si } z_0 \neq 0 \text{ alors } r = \frac{1}{|z_0|}.}$$

Q23. Comme $|z_0| < 1$, on a toujours $r > 1$.
Or, en tant que somme de série entière, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence et les dérivées s'y obtiennent par dérivation terme à terme.
Comme $[0,1] \subset]-r,r[$, on en déduit que :

$$\boxed{g \text{ est définie et de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } [0,1].}$$

On a de plus pour tout $t \in [0,1]$:

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{z_0^n}{n} n t^{n-1} = z_0 \sum_{n=1}^{+\infty} (-tz_0)^{n-1} = z_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-tz_0)^n.$$

On reconnaît une somme géométrique (avec $|-tz_0| \leqslant |z_0| < 1$) donc :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in [0,1],\ g'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0}.}$$

Q24. Comme g est dérivable sur $[0,1]$ à valeurs complexes, on sait par le cours (PCSI) que h est dérivable sur $[0,1]$ et on a :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in [0,1],\ h'(t) = g'(t)\exp(g(t)) = \frac{z_0}{1+tz_0}h(t).}$$

Q25. La fonction $\varphi : t \mapsto 1+tz_0$ est dérivable sur $[0,1]$ et a pour dérivée $t \mapsto z_0$.
Pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{z_0}{1+tz_0}\varphi(t) = \dfrac{z_0}{1+tz_0}(1+tz_0) = z_0 = \varphi'(t)$.
Donc :

$$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto 1+tz_0 \text{ est bien une solution de l'équation différentielle } y'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0}y(t) \text{ sur } [0,1].}$$

On a de plus $\varphi(0) = 1$ et $h(0) = \exp(g(0)) = \exp(0) = 1$.
Ainsi, φ et g sont deux solutions du problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) - \dfrac{z_0}{1+tz_0}y(t) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $[0,1]$ (on a bien $t \mapsto \dfrac{-z_0}{1+tz_0} \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$).
Or, un problème de Cauchy admet une unique solution donc on en déduit que pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) = \varphi(t)$.
En particulier, $h(1) = \varphi(1)$ ce qui donne :

$$\boxed{\exp(S(z_0)) = 1+z_0.}$$

EXERCICE 3 –Un développement en série entière (d'après CCINP 2005 PC)

Q26. Soit $x \in [-1,1]$. On a pour tout $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $|x\sin^2 t| \leqslant |x| \leqslant 1$ donc $x\sin^2 t \geqslant -1$ donc $1+x\sin^2 t \geqslant 0$.
On en déduit par composition de fonctions continues que la fonction $t \mapsto \sqrt{1+x\sin^2 t}$ est continue sur le segment $[0,\frac{\pi}{2}]$ donc l'intégrale définissant $\psi(x)$ existe bien en tant que réel.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \psi \text{ est bien définie sur } [-1,1].}$$

Q27. D'après le cours, on a pour tout $u \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}u^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.(-1)(-3)\dots(-(2n-3))}{2^n n!}u^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}1.3\dots(2n-1)}{(2n-1)2^n n!}u^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{1.2.3\dots(2n-1)(2n)}{2^n n! 2.4\dots(2n)}u^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}u^n.
\end{aligned}$$

Comme le terme pour $n=0$ vaut bien 1, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } u \in]-1,1[, \text{ on a } \sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}u^n.}$$

Q28. Soit $x \in]-1,1[$.
On a pour tout $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $|x\sin^2(t)| \leqslant |x| < 1$ donc $x\sin^2(t) \in]-1,1[$ donc par la question précédente :

$$\sqrt{1+x\sin^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n\sin^{2n} t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction $t \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n\sin^{2n} t$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Montrons que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} x^n \sin^{2n} t \right| \leqslant \frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} |x|^n \text{ (ne dépend pas de } t).$$

Ainsi, $\frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} |x|^n$ est un majorant de $\{|f_n(t)|, t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ et $\|f_n\|_\infty^{[0,\frac{\pi}{2}]}$ est le plus petit majorant de cet ensemble donc :

$$0 \leqslant \|f_n\|_\infty^{[0,\frac{\pi}{2}]} \leqslant \frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} |x|^n.$$

La série numérique $\sum \frac{1}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} |x|^n$ converge par ce qui précède puisqu'on reconnaît la série entière de somme $-\sqrt{1-|x|}$ avec $|x| \in]-1, 1[$.
On en déduit par comparaison que la série $\sum \|f_n\|_\infty^{[0,\frac{\pi}{2}]}$ converge.
Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on peut donc intégrer terme à terme :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} x^n \sin^{2n} t \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt \right) x^n.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \psi \text{ est développable en série entière et pour tout } x \in]-1,1[,\ \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \frac{2}{\pi} I_n x^n.}$$

Q29. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Les fonctions $t \mapsto \sin^{2n+1} t$ et $t \mapsto -\cos t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\sin(t)\,dt = [\sin^{2n+1}(t) \times (-\cos(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+1)\sin^{2n}(t)\cos(t) \times (-\cos(t))\,dt \\
&= 0 + (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)(1-\sin^2(t))\,dt \\
&= (2n+1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(n+1)}(t)\,dt \right) \\
&= (2n+1)(I_n - I_{n+1}).
\end{aligned}$$

On a donc $(2n+1)I_n = (2n+2)I_{n+1}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n.}$$

On a :

$$\boxed{I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}.}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\frac{(2 \times 0)!}{2^{2\times 0+1}(0!)^2}\pi = \frac{\pi}{2} = I_0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$. Montrons que $I_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}\pi$.
On a $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$ d'après ce qui précède donc en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{(2n+1)!}{2(n+1)2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{(2n+2)(2n+1)!}{2^2(n+1)^2 2^{2n+1}(n!)^2}\pi = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+3}((n+1)!)^2}\pi.$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi.}$$

Par suite :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\right)^2 x^n.}$$

EXERCICE 4 –Une équation différentielle (d'après E3A 2025 PC)

Q31. Si on évalue (E) pour $x=0$, il vient : $y(0)=0$.

Q32. On peut commencer par observer que $a_0 = f(0) = 0$ (d'après **Q31.**) et $a_1 = f'(0) = 1$ (par hypothèse).
De plus, en tant que somme d'une série entière, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$ et, pour tout $x \in]-R\,;R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$.

Ainsi, puisque f est solution de (E), $x^2\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} - \left(x^2+x+1\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$.

Puisque $x^2\sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1)x^n$, $x\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n x^n$ et :

$$\begin{aligned}
\left(x^2+x+1\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= a_0 + (a_0+a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)x^n
\end{aligned}$$

l'égalité issue de (E) se réécrit alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n n x^n - \left(a_0 + (a_0+a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty}(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)x^n\right) = 0$$

ou encore : $a_1 x - a_0 - (a_0+a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty}(-a_{n-2} - a_{n-1} + (n(n-1)+n-1)a_n)x^n = 0$.
Par unicité des coefficients d'une série entière, on en déduit que $a_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 2$:

$$a_{n-2} + a_{n-1} - \left(n^2-1\right)a_n = 0.$$

Q33. Raisonnons par récurrence (double) et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.

- ⇢ Puisque $a_1 = 1$ et $a_2 = \dfrac{a_1+a_0}{2^2-1} = \dfrac{1}{3}$, les inégalités $a_1 \leqslant \dfrac{1}{0!}$ et $a_2 \leqslant \dfrac{1}{1!}$ sont vérifiées.
- ⇢ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies : montrons $\mathscr{P}(n+2)$.
  Puisque, d'après **Q32.**, $\left((n+2)^2-1\right)a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, il vient :

$$\begin{aligned}
|a_{n+2}| &\leqslant \frac{|a_{n+1}|}{(n+3)(n+1)} + \frac{|a_n|}{(n+3)(n+1)} \\
&\leqslant \frac{1}{(n+3)(n+1)\times n!} + \frac{1}{(n+3)(n+1)\times(n-1)!} \quad \text{d'après } \mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \times \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} + \frac{n}{n+3}\right)}_{=\frac{n+1}{n+3}<1} \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

  $\mathscr{P}(n+2)$ est donc vraie.

On conclut à l'aide du principe de récurrence (double).

Q34. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n x^n| \leqslant \dfrac{|x|^n}{(n-1)!} = |x| \times \dfrac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$, et comme $\sum \dfrac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$ est une série (exponentielle) convergente, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |a_n x^n|$ est convergente, autrement dit $\sum a_n x^n$ est absolument convergente, donc convergente.

La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ ($R = +\infty$).

Q35. $z(0) = 0 \times y(0) \times \mathrm{e}^0 = 0$.

De plus, z est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = y(x)\mathrm{e}^x + xy'(x)\mathrm{e}^x + xy(x)\mathrm{e}^x$, donc $z'(0) = y(0) = 0$.

Q36. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z''(x) &= y'(x)\mathrm{e}^x + y(x)\mathrm{e}^x + y'(x)\mathrm{e}^x + xy''(x)\mathrm{e}^x + xy'(x)\mathrm{e}^x + y(x)\mathrm{e}^x + xy'(x)\mathrm{e}^x + xy(x)\mathrm{e}^x \\ &= \mathrm{e}^x \left(xy''(x) + (2+2x)y'(x) + (2+x)y(x)\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} xz''(x) - (2x+1)z'(x) &= x\mathrm{e}^x \left(xy''(x) + (2+2x)y'(x) + (2+x)y(x)\right) \\ &\qquad -(2x+1)\left(y(x)\mathrm{e}^x + xy'(x)\mathrm{e}^x + xy(x)\mathrm{e}^x\right) \\ &= \mathrm{e}^x \left(x^2y''(x) + xy'(x) - \left(x^2+x+1\right)y(x)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Q37. $u' - \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) u = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

Puisque $x \mapsto -(2x + \ln(x))$ est une primitive de $x \mapsto -\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, les solutions de notre équation différentielle sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{2x+\ln(x)} = \lambda x \mathrm{e}^{2x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Q38. Puisque z' est solution de (F) sur $\mathbb{R}$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = cx\mathrm{e}^{2x}$.

Comme $z(0) = 0$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z(x) &= \int_0^x ct\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= c\left(\left[t \times \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x - \int_0^x 1 \times \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{(intégration par parties)} \\ &= c\left(\frac{x\mathrm{e}^{2x}}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^x\right) \\ &= c\left(\frac{x\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{4}\right) \\ &= \frac{c}{4} \times \left((2x-1)\mathrm{e}^{2x} + 1\right). \end{aligned}$$

En posant $a = c/4$, on obtient le résultat voulu.

Q39. Puisque f est une solution de (E), développable en série entière sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc d'après **Q38.** : il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf(x)\mathrm{e}^x = a\left((2x-1)\mathrm{e}^{2x} + 1\right)$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = a\left(2\mathrm{e}^x - \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{x}\right) = 2a\left(\mathrm{e}^x - \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right)$.

On peut réécrire, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = 2a\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = 2a\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right).$$

Cette écriture demeure valable pour $x = 0$ puisque $f(0) = 0$. Ce développement en série entière nous donne $f'(0) = 2a$ (coefficient de x dans le développement en série entière), et comme $f'(0) = 1$, $a = 1/2$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x - \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On pourrait conclure ce raisonnement par la réciproque, c'est-à-dire vérifier que la fonction finalement obtenue est bel et bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$, mais ça n'est pas explicitement demandé.