DEVOIR SURVEILLÉ 4 - 09/01/26 - *Durée 4h*

Sujet 2 - Type Mines-Centrale

Problème 1 : Étude d'une fonction de Lambert

Les parties II et III sont indépendantes.

Pour des entiers k et n avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial k parmi n est noté $\binom{n}{k}$.
Lorsque $k \leqslant n$, $[\![k, n]\!]$ représente l'ensemble des nombres entiers compris, au sens large, entre k et n.

Partie I - Définition de la fonction W

On considère l'application :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,\mathrm{e}^x . \end{array} \right.$$

Q1. Justifier que l'application f réalise une bijection de l'intervalle $[-1, +\infty[$ sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée W. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel $x \geqslant -\mathrm{e}^{-1}$, $W(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ (équation d'inconnue $t \in [-1, +\infty[$).

Partie II - Développement en série entière de la fonction W

Le but de cette partie est d'établir que la fonction W est développable en série entière et de préciser son développement ainsi que son rayon de convergence. Pour cela, on commence par établir un résultat de nature algébrique.

II.A. Le théorème binomial d'Abel

On considère dans cette partie un entier naturel n ainsi qu'un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ en posant

$$A_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad A_k = \frac{1}{k!} X (X - ka)^{k-1}.$$

On note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes et de degré inférieur ou égal à n.

Q2. Démontrer que la famille $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q3. Démontrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad A_k'(X) = A_{k-1}(X - a)$.

Q4. En déduire, pour j et k éléments de $[\![0, n]\!]$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$. On distinguera suivant que $j < k$, $j = k$ ou $j > k$.

Soit P un élément de $\mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes tels que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k.$$

Q5. Démontrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\quad \alpha_j = P^{(j)}(ja)$.

Q6. En déduire l'identité binomiale d'Abel :

$$\forall\, (a, x, y) \in \mathbb{C}^3, \quad (x+y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(x-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}.$$

Q7. Établir la relation,

$$\forall\, (a, y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-ka)^{k-1}(y+ka)^{n-k}.$$

II.B. Développement en série entière

On définit une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ en posant,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{(-n)^{n-1}}{n!}.$$

On définit, lorsque c'est possible, $\quad S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Q8. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

Q9. Justifier que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Q10. Démontrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R, R]$.

Q11. Démontrer que,

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad x(1+S(x))S'(x) = S(x).$$

`On pourra utiliser le résultat de la question 7.`

On considère la fonction $\quad h : \left| \begin{array}{ccc}]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & S(x)\,\mathrm{e}^{S(x)} \end{array} \right.$.

Q12. Démontrer que h est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

Q13. Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$ sur chacun des intervalles $]0, R[$, $]-R, 0[$, puis sur l'intervalle $]-R, R[$.

Q14. En déduire que,

$$\forall\, x \in]-R, R[, \quad S(x) = W(x).$$

Q15. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[-R, R]$?

Partie III - Approximation de W

On définit dans cette partie une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et on étudie sa convergence vers la fonction W définie dans la partie I.
Pour tout réel positif x, on considère la fonction Φ_x définie par

$$\Phi_x : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & x\exp(-x\exp(-t)) \end{array} \right.$$

et on définit, sur $\mathbb{R}_+$, une suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \begin{array}{l} w_0(x) = 1 \\ w_{n+1}(x) = \Phi_x(w_n(x)). \end{array} \right.$$

Q16. Démontrer que, pour tout réel positif x, $W(x)$ est un point fixe de Φ_x, c'est-à-dire une solution de l'équation $\Phi_x(t) = t$.

Q17. Démontrer que, pour tout réel positif x, la fonction Φ_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \Phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}.$$

Q18. En déduire que

$$\forall\, x \in [0, \mathrm{e}], \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n |1 - W(x)|.$$

Q19. Pour tout réel $a \in]0, \mathrm{e}[$, justifier que la suite de fonctions (w_n) converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction W.

Q20. La suite de fonctions (w_n) converge-t-elle uniformément vers W sur $[0, e]$?

Problème 2 : Sur les matrices et endomorphismes nilpotents

Le but de ce problème est de démontrer quelques résultats sur les matrices et les endomorphismes nilpotents.

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et, pour tout entier naturel k, $M^{k+1} = M\,M^k$.

De même, si u est un endomorphisme de E, on définit la suite des puissances de u par $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et, pour tout entier naturel k, $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'*indice de nilpotence* de M.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente d'indice p.

On pose $J_1 = (0)$ et, pour un entier $\alpha \geqslant 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\operatorname{diag}(A, B)$, la matrice diagonale par blocs

$$\operatorname{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C}).$$

Plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C}), \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\cdots+n_k}(\mathbb{C}).$$

Q1. Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

Partie I - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geqslant 2$.

Q2. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.

Q3. Vérifier que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$ est libre. En déduire que $p = 2$.

Q4. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.

Q5. Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2.

Q6. En déduire que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont exactement les matrices de trace nulle et de déterminant nul.

Partie II - Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

On suppose que $n \geqslant 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r.

Q7. Montrer que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$ et que $2r \leqslant n$.

Q8. On suppose que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E tels que la famille $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de E.

Q9. Donner la matrice de u dans cette base.

Q10. On suppose $\operatorname{Im}(u) \neq \operatorname{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}$ appartenant à $\operatorname{Ker}(u)$ tels que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \ldots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}\big)$ est une base de E.

Q11. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Partie III - Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q12. Montrer que, si A est nilpotente, alors 0 est l'unique valeur propre de A.

Q13. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotentes et diagonalisables ?

Q14. Montrer qu'une matrice est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est égal à X^n.

Q15. Montrer la réciproque de la question 12.

Q16. Montrer qu'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale nulle est nilpotente et qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.

Q17. Démontrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice p, alors tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est un polynôme annulateur de A.

On suppose que P est un polynôme annulateur de A nilpotente.

Q18. Démontrer que 0 est racine de P.

Q19. On note m la multiplicité de 0 dans P, ce qui permet d'écrire $P = X^m Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Démontrer que $Q(A)$ est inversible puis que P est un multiple de X^p dans $\mathbb{C}[X]$.

Partie IV - Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$.

On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de certaines matrices nilpotentes.

IV.1) On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

Q20. Calculer la trace et le rang de A. En déduire, sans aucun calcul, le polynôme caractéristique de A. Montrer que A est nilpotente et donner son indice de nilpotence.

Q21. Démontrer que A est semblable à la matrice $\operatorname{diag}(J_2, J_1)$. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que $A = P\, diag(J_2, J_1)\, P^{-1}$.

On cherche à déterminer l'ensemble des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^2 = A$. On note ρ l'endomorphisme canoniquement associé à R.

Q22. Démontrer que $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.

Q23. En déduire l'ensemble des racines carrées de A.
`On pourra considérer` $R' = P^{-1}RP$.

IV.2) On se propose dans cette question d'étudier l'équation matricielle $R^2 = J_3$.

Q24. Soit R une solution de cette équation. Donner les valeurs de R^4 et R^6, puis l'ensemble des solutions de l'équation.

IV.3) En général, soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p. On se propose d'étudier l'équation $R^2 = V$.

Q25. Montrer que, si $2p - 1 > n$, alors il n'existe aucune solution.

Q26. Pour toute valeur de l'entier $n \geqslant 3$, exhiber une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geqslant 2$ et admettant au moins une racine carrée.