Lycée Victor Hugo – Besançon
PC* | Année 2025-2026

CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 4 (sujet 2)

Problème 1 : Étude d'une fonction de Lambert (extrait Centrale PSI 2020)

Partie I – Définition de la fonction W

Q1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (1+x)e^x$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est alors continue et strictement croissante de l'intervalle $[-1, +\infty[$. Appliquons le théorème de la bijection monotone : f réalise alors une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $f([-1, +\infty[= [-e^{-1}, +\infty[$.
Notons aussi (ce sera utile en question **Q15.**) que d'après ce même théorème, la réciproque de cette bijection, notée W dans le sujet, est continue sur $[-e^{-1}, +\infty[$.

Partie II – Développement en série entière de la fonction W

Partie II.A – Le théorème binomial d'Abel

Q2. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme A_k est de degré k. Ainsi, la famille $(A_0, ..., A_n)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ de degrés échelonnés : cette famille est donc libre, de cardinal $n+1$=dim $\mathbb{C}_n[X]$.
Ainsi, la famille $(A_0, ..., A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si $k = 1$ alors la vérification est immédiate. Supposons donc $k \geqslant 2$. On a:

$$\begin{aligned}
A_k'(X) &= \frac{1}{k!}(X-ka)^{k-1} + \frac{1}{k!}X\cdot(k-1)(X-ka)^{k-2} \\
&= \frac{1}{k!}\left((X-ka)+(k-1)X\right)(X-ka)^{k-2} \\
&= \frac{1}{k!}\left(kX-ka\right)(X-ka)^{k-2} \\
&= \frac{1}{(k-1)!}(X-a)\left((X-a)-(k-1)a\right)^{k-2} = A_{k-1}(X-a),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Q4. Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, n]\!]$. Si $j > k$, alors $A_k^{(j)} = 0$ (car A_k est de degré k) donc $A_k^{(j)}(ja) = 0$.
Supposons à présent $j \leqslant k$. La question précédente implique, par une récurrence immédiate:

$$A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja),$$

et donc $A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0)$. Or il est facile de vérifier qu'on a $A_\ell(0) = 1$ si $\ell = 0$ et $A_\ell(1) = 0$ si $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $A_k^{(j)}(ja) = 0$ si $k - j > 0$, tandis que $A_k^{(j)}(ja) = 1$ si $k - j = 0$.

En conclusion:

$$A_k^{(j)}(ja) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ 1 & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Q5. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Si l'on dérive j fois l'égalité $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$ et qu'on l'évalue en ja, alors la question précédente nous permet d'écrire:

$$P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k^{(j)}(ja) = \alpha_j A_j^{(j)}(ja) + \sum_{k \neq j} \alpha_k \times 0 = \alpha_j,$$

d'où le résultat.

Q6. Soit $(a, x, y) \in \mathbb{C}^3$. On applique la question précédente au polynôme $P = (X + y)^n$, et on a alors:

$$(X + y)^n = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(ka)A_k = P^{(0)}(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(ka)X(X - ka)^{k-1},$$

et comme $P^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X + y)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on en déduit aisément:

$$(X + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} X(ka + y)^{n-k}(X - ka)^{k-1} = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X(ka + y)^{n-k}(X - ka)^{k-1}.$$

Il reste à évaluer cette égalité en x pour en déduire le résultat voulu:

$$(x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(ka + y)^{n-k}(x - ka)^{k-1}.$$

Q7. L'identité demandée est considérée vraie par conventions si $n = 0$ et nous prenons donc $n \geqslant 1$. Dérivons la relation de la question précédente (l'égalité polynomiale, ou l'égalité pour une variable réelle x, s'il choque de dériver selon une variable complexe). On obtient alors, pour tout $(x, a, y) \in \mathbb{C}^3$:

$$n(x + y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (ka + y)^{n-k}(x - ka)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x(ka + y)^{n-k}(k - 1)(x - ka)^{k-2}.$$

En posant $x = 0$ la seconde somme s'annule, et donc:

$$\forall (a, y) \in \mathbb{C}^2, \quad ny^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (ka + y)^{n-k}(-ka)^{k-1},$$

D'où le résultat.

Partie II.B – Développement en série entière

Q8. Nous allons appliquer la règle de D'Alembert. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \neq 0$ et on a :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Or, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$, et l'équivalent classique $\ln(1 + u) \underset{u \to 0}{\sim} u$ implique :

$$(n - 1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} (n - 1) \times \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par continuité de l'exponentielle en 1, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e^1.$$

Donc d'après la règle de D'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est $R = \frac{1}{e}$.

Q9. La fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence $R = \frac{1}{e}$, et on a:

$$S(0) = 0, \quad \text{et:} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad S^{(n)}(0) = n! a_n = n! \times \frac{(-n)^{n-1}}{n!} = (-n)^{n-1}.$$

Q10. Nous allons démontrer simultanément la définition et la continuité sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$, en montrant que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}(x \mapsto a_n x^n)$ converge normalement (donc uniformément) sur cet intervalle.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$, $f_n(x) = a_n x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ on a $|f_n(x)| \leqslant |a_n|\left(\frac{1}{e}\right)^n$, et cette majoration est indépendante de x. Donc par définition de la borne supérieure, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{|a_n|}{e^n}$.

Il reste à montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{e^n}$ converge pour obtenir ce qu'on veut mais la règle de D'Alembert donne le cas d'incertitude ici. Par contre nous pouvons obtenir un équivalent asymptotique du terme général grâce à la formule de Stirling, que nous rappelons:

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On a alors, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{|a_n|}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{n^{3/2}} > 0.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ est d'exposant $3/2 > 1$, donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|a_n|}{e^n}$ converge, et toujours par ce même théorème on en déduit la convergence normale (et donc uniforme) sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Comme f_n est continue sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$, on en déduit que S est définie et continue sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$.

Q11. Par commodité, posons $a_0 = 1$. Alors:

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad 1 + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Comme $x \mapsto 1 + S(x)$ et $x \mapsto xS'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ sont des sommes de séries entières de rayon de convergence $\frac{1}{e}$, leur produit de Cauchy converge absolument sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, et :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad (1 + S(x))xS'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \tag{1}$$

où, par définition d'un produit de Cauchy, on a $c_0 = a_0 \times 0 \times a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (n-k) a_{n-k} &= n a_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} \cdot (n-k) \frac{(-n+k)^{n-k-1}}{(n-k)!} \\ &= n a_n + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k}. \end{aligned}$$

Si $n \geqslant 1$ alors on pose $a = 1$ et $y = -n$ dans la relation obtenue à la question **Q7.**, et on obtient:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad n(-n)^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-k)^{k-1} (-n+k)^{n-k} + (-n)^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k} + (-n)^{n-1}, \end{aligned}$$

et donc:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (-k)^{k-1} (n-k)^{n-k} = (n-1)(-n)^{n-1}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad c_n = n a_n - \frac{(n-1)(-n)^{n-1}}{n!} = n a_n - (n-1) a_n = a_n,$$

donc finalement l'égalité (1) devient :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right[, \quad (1 + S(x)) x S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = S(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q12. Comme S est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, c'est aussi le cas de h par produit et composition de fonctions de classe C^∞, et on a :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right[, \quad h'(x) = S'(x) e^{S(x)} + S(x) S'(x) e^{S(x)} = (1 + S(x)) S'(x) e^{S(x)}$$

En multipliant cette égalité par x, et en utilisant l'égalité $(1 + S(x)) x S'(x) = S(x)$ démontrée dans la question précédente, on en déduit :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right[, \quad x h'(x) = S(x) e^{S(x)} = h(x),$$

donc h est solution de l'équation différentielle:

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right[, \quad x y'(x) - y(x) = 0.$$

Q13. Posons $I = \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$ ou $\left]0, \frac{1}{e}\right[$. Comme $x \neq 0$ pour tout $x \in I$, l'équation différentielle ci-dessus équivaut à : $\forall x \in I$, $y'(x) - \dfrac{1}{x} y(x) = 0$. Comme $x \mapsto -\ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sur I, la théorie des équations différentielles linéaires du premier ordre implique donc que les solutions sur I sont de la forme :

$$y : x \mapsto \alpha e^{\ln(|x|)} = \alpha |x|.$$

Quitte à changer α en $-\alpha$, on en déduit que sur les deux intervalles possibles, les solutions sont de la forme $x \mapsto \alpha x$.

À présent, soit y une application dérivable sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ et qui soit solution de (E) $xy' - y = 0$ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$. En particulier, par restriction, cela définit une solution de (E) ur $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$ et $\left]0, \frac{1}{e}\right[$. Donc, d'après ce qui précède, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que:

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[, \ y(x) = \alpha x, \quad \forall x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[, \ y(x) = \beta x.$$

Par continuité de y en 0, on doit avoir $y(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = 0$. De plus y est dérivable en 0, ce qui impose : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0}$, c'est-à-dire: $\beta = \alpha$.

De cela on déduit finalement que si y est une solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, alors y est de la forme $x \mapsto \alpha x$ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Réciproquement, cette application est bien une solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$.
Ainsi, les solutions de (E) sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \alpha x$ pour $\alpha in \mathbb{R}$.

Q14. Nous avons montré que $h : x \mapsto S(x)e^{S(x)}$ est solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$. Donc, d'après la question précédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad h(x) = \alpha x.$$

Pour déterminer α, on note qu'en utilisant la dérivée calculée en **Q12.**, on a : $h'(0) = (1 + S(0))S'(0)e^{S(0)} = 1$ (en effet $S(0) = 0$ et $S'(0) = 1$ d'après **Q9.**). On a aussi $h' = \alpha$ donc $\alpha = 1$. Ainsi :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad S(x)e^{S(x)} = x.$$

Cette égalité peut se réécrire:

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad f(S(x)) = x. \tag{2}$$

Or, si $x \in \left]-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right[$, l'équation $f(t) = x$ a une unique solution $t \in [-1, +\infty[$, qui est $W(x)$.
Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\right[$. Vérifions qu'on a bien $S(x) \geqslant -1$.
Considérons d'abord le cas $x \geqslant 0$.
Montrons que la série alternée $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. En reprenant le calcul fait à la question **Q8.**, il vient, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} |x| = \exp\left[(n-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] |x| \leqslant \exp\left(\frac{n-1}{n}\right) |x| \leqslant 1.$$

On en déduit que la suite $(|a_n x^n|)$ est décroissante et elle converge vers 0 (puisque x est dans l'intervalle ouvert de convergence de la série entière). Le critère spécial donne alors $\left|S(x)\right| \leqslant |a_1 x| \leqslant e^{-1} < 1$, ce qui permet de conclure.
Considérons maintenant le cas $x < 0$.
Pour cela, on note que l'égalité (2) donne, quand $x \to -\dfrac{1}{e}$ (et parce que S est continue en $-\dfrac{1}{e}$ d'après la question **Q10** et f est continue sur $\mathbb{R}$) : $f\left(S\left(-\dfrac{1}{e}\right)\right) = -\dfrac{1}{e}$. Comme -1 est l'unique solution réelle à l'équation $f(t) = -\dfrac{1}{e}$ (voir le tableau de variations établi en **Q1.**), on en déduit : $S\left(-\dfrac{1}{e}\right) = -1$.
Alors, pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{e}, 0\right[$ on a:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n^{n-1}}{n!}(-x)^n > \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{n^{n-1}}{n!}\left(\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}\left(-\frac{1}{e}\right)^n,$$

c'est-à-dire : $\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right]$, $S(x) > S\left(-\frac{1}{e}\right) = -1$, ce qu'on voulait démontrer.

En conclusion, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$, $S(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t) = x$ d'inconnue $t \geqslant -1$. Donc :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[, \quad W(x) = S(x).$$

Q15. Les applications S et W sont continues sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$: nous l'avons démontré dans la question **Q10** pour S et mentionné dans la question **Q1** pour W. Par conséquent, leurs limites en $\pm\frac{1}{e}$ égalent leurs valeurs en $\pm\frac{1}{e}$. Prendre la limite quand $x \to \pm\frac{1}{e}$ dans l'égalité de la question précédente permet donc de démontrer qu'elle reste valable si $x = \pm\frac{1}{e}$. On en déduit que la réponse à la question posée est affirmative, et on a:

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad W(x) = S(x).$$

Partie III – Approximation de W

Q16. Soit $x \geqslant 0$. On a :

$$\phi_x(W(x)) = xe^{-xe^{-W(x)}}.$$

Or, on sait que $W(x)e^{W(x)} = x$ donc $W(x) = xe^{-W(x)}$. On en déduit :

$$\phi_x(W(x)) = xe^{-W(x)} = W(x)$$

donc $W(x)$ est un point fixe de ϕ_x.

Q17. La fonction ϕ_x est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par composée d'applications de classe C^2.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_x'(t) = x^2 e^{-t} \exp\left(-xe^{-t}\right) \geqslant 0$.
On peut utiliser **Q1.** en remarquant que $\phi_x'(t) = -xf(-xe^{-t})$ et en utilisant la minoration de f par $-e^{-1}$, on obtient $\phi_x'(t) \leqslant -x(-e^{-1}) = \frac{x}{e}$.

On peut aussi calculer $\phi_x''(t) = x^2 e^{-t} \exp\left(-xe^{-t}\right)(-1+xe^{-t})$ qui est positive si et seulement si $x \geqslant e^t$ c'est-à-dire $\ln x \geqslant t$.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		$\ln x$		$+\infty$
$\phi_x''(t)$		$+$	0	$-$	
ϕ_x'		$\nearrow$		$\searrow$	

On en déduit que ϕ_x' a un maximum atteint en $t = \ln x$ et que ce maximum vaut $\phi_x'(\ln x) = x\exp(-xe^{-\ln x}) = x\exp(-x/x) = \frac{x}{e}$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \phi_x'(t) \leqslant \frac{x}{e}.$$

Q18. Soient $x \in [0,e]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$|w_{n+1}(x) - W(x)| \overset{\textbf{Q16.}}{=} |\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))|\,.$$

Or ϕ_x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et $|\phi_x'| \leqslant \frac{x}{e}$ d'après la question précédente.
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|w_{n+1}(x) - W(x)| = |\phi_x(w_n(x)) - \phi_x(W(x))| \leqslant \frac{x}{e}|w_n(x) - W(x)|.$$

Ceci vaut pour tout $x \in [0,e]$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, par une récurrence facile, on obtient :

$$\forall x \in [0,e],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^n |w_0(x) - W(x)| \tag{3}$$

et par définition on a $w_0(x) = 1$ d'où le résultat.

Q19. Soit $a \in]0,e[$. L'application $1 - W$ est bornée sur $[0,a]$ en tant qu'application continue sur un segment (le majorant est facile à expliciter mais ce n'est pas important pour ce qui suit). L'inégalité de la question précédente implique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,a], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{a}{e}\right)^n \|1 - W\|_\infty^{[0,a]}.$$

Cette majoration est indépendante de x. Donc, par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|w_n - W\|_\infty^{[0,a]} \leqslant \left(\frac{a}{e}\right)^n \|1 - W\|_\infty^{[0,a]}.$$

Comme $\frac{a}{e} \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a}{e}\right)^n = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|w_n - W\|_\infty^{[0,a]} = 0$. Ceci démontre que la suite de fonctions $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,a]$ vers W.

Q20. La réponse est positive. Montrons que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [0,e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme W est continue en e, il existe $\eta > 0$ avec $\eta < e$ tel que:

$$\forall x \in [e-\eta, e], \quad |W(x) - W(e)| \leqslant \varepsilon.$$

Posons $a = e - \eta$. On a $W(e) = 1$ donc, d'après **Q18.** et l'inégalité ci-dessus:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^n |1 - W(x)| \leqslant |1 - W(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Sur $[0,a]$, nous savons que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers W. Donc, par définition, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [0,a], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \varepsilon.$$

En combinant cette inégalité et celle sur $[a,e]$, on a donc l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :

$$\forall x \in [0,e], \quad |w_n(x) - W(x)| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui démontre que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,e]$ vers W.

Problème 1 : Sur les matrices et endomorphismes nilpotents (extrait Centrale PSI 2019)

Q1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et u un endomorphisme de E, notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Si u est nilpotent d'indice 1, cela signifie d'après l'énoncé que $M^1 = M = 0$ donc que $u = 0$. En conclusion :

$\boxed{\text{il y a donc un unique endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à 1 et c'est l'endomorphisme nul.}}$

Partie I – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

Q2. Avec les notations de la question 1, puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = M^k$ pour tout entier naturel k, le fait que u soit nilpotent d'indice p signifie que M l'est donc que $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$ (par minimalité de p). Ainsi, $u^{p-1} \neq 0$. On en déduit (par définition de ce qu'est l'endomorphisme nul)

$$\boxed{\text{l'existence d'un vecteur } x \text{ de } E \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0.}$$

Q3. Soit une famille de scalaires $(\lambda_k)_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \in \mathbb{C}^p$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$ $(*)$.

Si on avait $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \ldots, 0)$, on pourrait définir l'entier $i = \min(\{0 \leqslant k \leqslant p-1 \mid \lambda_k \neq 0\})$ de sorte que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{i-1} = 0$ et $\lambda_i \neq 0$. En composant la relation $(*)$ par u^{p-1-i} (on le peut car $p-1-i \geqslant 0$ par construction), on aurait donc, par linéarité de u, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = u^{p-1-i}(0) = 0$, d'où

$$\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k u^{p-1-i+k}(x) = 0.$$

Comme $u^p = 0$, il ne reste dans cette somme que $\lambda_i u^{p-1}(x) = 0$. C'est impossible puisque $\lambda_i \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$ d'après la question 2. On conclut ce raisonnement par l'absurde : $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) = (0, \ldots, 0)$. Ainsi,

$$\boxed{\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \text{ est libre.}}$$

Cette famille libre admet p vecteurs dans l'espace E de dimension $n = 2$. On sait d'après le cours que le nombre de vecteurs de cette famille est inférieur à la dimension de l'espace : $p \leqslant 2$. Or par hypothèse, $p \geqslant 2$, d'où

$$\boxed{p = 2.}$$

Q4. Comme u est nilpotent d'indice 2 d'après la question précédente, $u \neq 0$ et $u^2 = u \circ u = 0$.
On a alors pour tout $x \in E$, $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$ (puisque $u(u(x)) = 0$) d'où $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Or, d'après la formule du rang appliquée à l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$, il vient $2 = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u))$. Puisque $\mathrm{rg}(u) > 0$ car $u \neq 0$, on ne peut avoir que $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$. Par inclusion et égalité des dimensions, on peut conclure que

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u).}$$

Q5. D'après les questions 2 et 3, il existe un vecteur x de E tel que $(x, u(x))$ soit libre dans E de dimension 2, le cours nous apprend alors que $\mathcal{B} = (x, u(x))$ est une base de E.
En posant $y = u(x)$, on a $u(x) = y$ et $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ vérifie donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2.}$$

Q6. $(\Longrightarrow)$ Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nilpotente et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A. Comme A, u est nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. On traite les deux cas des questions précédentes avec $E = \mathbb{C}^2$.

• Si $p=1$, d'après la question 1, $u=0$ donc $A=0$ et on a bien $\operatorname{tr}(A)=\det(A)=0$.
• Si $p \geqslant 2$, on a vu en question 5 qu'il existait une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^2$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=J_2$. Comme A et J_2 représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables (plus précisément si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à $\mathcal{B}$, on a $A=PJ_2P^{-1}$) donc elles ont même trace et même déterminant. Comme $\operatorname{tr}(J_2)=\det(J_2)=0$, on a encore $\operatorname{tr}(A)=\det(A)=0$.
($\Longleftarrow$) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A)=\det(A)=0$. On sait d'après le cours que $\chi_A = X^2-\operatorname{tr}(A)X+\det(A)=X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc $A^2=0$ car χ_A annule A : A est bien nilpotente d'indice $p \leqslant 2$. Par conséquent, on conclut par double implication que

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente} \iff (\operatorname{tr}(A)=\det(A)=0).}$$

Partie II – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice 2

Q7. À nouveau, comme u est nilpotent d'indice 2, on a $u^2=u\circ u=0$ donc

$$\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u).$$

Il vient donc $\operatorname{rg}(u) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(u))$. On ajoute $\operatorname{rg}(u)$ de part et d'autre de cette inégalité pour avoir, avec la formule du rang, l'inégalité

$$2\operatorname{rg}(u) = \boxed{2r \leqslant n} = \dim(E) = \operatorname{rg}(u)+\dim(\operatorname{Ker}(u)).$$

Q8. Comme $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension $r=\operatorname{rg}(u)$, il existe une base $(w_1,\dots,w_r)$ de $\operatorname{Im}(u)$. Par définition de l'image, il existe des vecteurs $e_1,\dots,e_r$ tels que $u(e_1)=w_1,\dots,u(e_r)=w_r$.
Vérifions que $\mathcal{B}=(e_1,u(e_1),e_2,u(e_2),\dots,e_r,u(e_r))$ est une base de E. Soit $(\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2,\dots,\lambda_r,\mu_r) \in \mathbb{C}^{2r}$ telle que

$$\lambda_1 e_1+\mu_1 u(e_1)+\lambda_2 e_2+\mu_2 u(e_2)+\cdots+\lambda_r e_r+\mu_r u(e_r)=0 \ (*).$$

On compose $(*)$ par u donc, comme $u^2=0$, il vient $\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2+\cdots+\lambda_r w_r=0$. Mais on sait que $(w_1,\dots,w_r)$ est libre donc $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$. Il ne reste donc plus dans $(*)$ que $\mu_1 w_1+\mu_2 w_2+\cdots+\mu_r w_r=0$ qui amène encore la conclusion $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_r=0$ car $(w_1,\dots,w_r)$ est libre. On vient de prouver que $\mathcal{B}$ est libre.
Or $\dim(E)=n=2r=\operatorname{rg}(u)+\dim(\operatorname{Ker}(u))$ par la formule du rang donc $\mathcal{B}$ admet autant de vecteurs que la dimension de E. On peut conclure que

$$\boxed{\mathcal{B}=(e_1,u(e_1),e_2,u(e_2),\dots,e_r,u(e_r)) \text{ est une base de } E.}$$

Q9. Pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant r$, $u(u(e_k))=u^2(e_k)=0$ donc, par construction de $\mathcal{B}$, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\operatorname{diag}(J_2,\dots,J_2) \in \mathcal{M}_{2r}(\mathbb{C}).}$$

Q10. On raisonne comme en question 8. Comme $\operatorname{rg}(u)=r$, il existe une base $(w_1,\dots,w_r)$ de $\operatorname{Im}(u)$, puis des vecteurs $e_1,\dots,e_r$ tels que $u(e_1)=w_1,\dots,u(e_r)=w_r$. Comme $\operatorname{Im}(u)\subset\operatorname{Ker}(u)$, $(w_1,\dots,w_r)$ est une famille libre de vecteurs de $\operatorname{Ker}(u)$. D'après le théorème de la base incomplète, comme $\dim(\operatorname{Ker}(u))=\dim(E)-\operatorname{rg}(u)=n-r\geqslant r$ par la formule du rang, on peut trouver des vecteurs $v_1,\dots,v_{n-2r}$ dans $\operatorname{Ker}(u)$ pour compléter $(w_1,\dots,w_r)$ en une base $\mathcal{B}'=(w_1,\dots,w_r,v_1,\dots,v_{n-2r})$ de $\operatorname{Ker}(u)$. Vérifions que $\mathcal{B}=(e_1,u(e_1),e_2,u(e_2),\dots,e_r,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r})$ est une base de E. Soit $(\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2,\dots,\lambda_r,\mu_r,\eta_1,\dots,\eta_{n-2r})\in\mathbb{C}^{2r}$ telle que

$$\lambda_1 e_1+\mu_1 u(e_1)+\lambda_2 e_2+\mu_2 u(e_2)+\ldots+\lambda_r e_r+\mu_r u(e_r)+\eta_1 v_1+\ldots+\eta_{n-2r}v_{n-2r}=0 \ (*).$$

On compose $(*)$ par u pour obtenir $\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2+\ldots+\lambda_r w_r=0$. Or $(w_1,\dots,w_r)$ est libre donc $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_r=0$. Il ne reste donc plus dans $(*)$ que $\mu_1 w_1+\mu_2 w_2+\ldots+\mu_r w_r+\eta_1 v_1+\ldots+\eta_{n-2r}v_{n-2r}=0$ qui amène encore la conclusion $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_r=\eta_1=\ldots=\eta_{n-2r}=0$ car $\mathcal{B}'$ est libre (c'est une base de $\operatorname{Ker}(u)$). Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre.
Comme $\mathcal{B}$ admet autant de vecteurs que la dimension de E. On peut conclure que

$$\boxed{\mathcal{B}=(e_1,u(e_1),e_2,u(e_2),\dots,e_r,u(e_r),v_1,\dots,v_{n-2r}) \text{ est une base de } E.}$$

Q 11. Pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant r$, on a $u(u(e_k)) = u^2(e_k) = 0$. Pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-2r$, on a $u(v_k) = 0$ car $v_k \in \mathrm{Ker}(u)$ donc, par construction de $\mathcal{B}$, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(J_2, \dots, J_2, 0_{n-2r}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

Partie III – Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Q12. Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A d'après le cours. Comme tout polynôme complexe admet au moins une racine d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le spectre de A n'est pas vide.
Si A est nilpotente d'indice p, on a $A^p = 0$. Ainsi, X^p est un polynôme annulateur de A. On sait alors que la spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de X^p qui est $\{0\}$. On en déduit :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, alors } 0 \text{ est l'unique valeur propre de } A.}$$

Q13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que A est nilpotente et diagonalisable. On vient de voir que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Mais on sait que si A est diagonalisable, $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ est annulateur de A, ce qui donne ici X annulateur de A d'où $A = 0$.
Réciproquement, la matrice nulle est à la fois nilpotente et diagonalisable (toute base est une base de vecteurs propres).

$$\boxed{\text{La seule matrice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ à la fois nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle.}}$$

Q14. $(\Longrightarrow)$ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ d'après la question 12. La seule valeur propre de A est donc 0 et elle est forcément de multiplicité n dans χ_A qui est de degré n et scindé sur $\mathbb{C}$. Ainsi, $\chi_A = X^n$.
$(\Longleftarrow)$ Si $\chi_A = X^n$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ donc $A^n = 0$ et A est bien nilpotente.
Par double implication, on vient de montrer que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\boxed{A \text{ est nilpotente} \Longleftrightarrow \chi_A = X^n.}$$

Q15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont 0 est l'unique valeur propre. Comme à la question précédente, l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_A ne peut être que n donc $\chi_A = X^n$ ce qui justifie que $\chi_A = X^n$ donc que A est nilpotente d'après la question 14. On a donc avec 12 et 15, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\boxed{A \text{ est nilpotente} \Longleftrightarrow \mathrm{Sp}(A) = \{0\}.}$$

Q16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire à diagonale nulle. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $\lambda I_n - A$ est aussi triangulaire avec des λ sur la diagonale donc $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$ ce qui justifie que $\chi_A = X^n$. D'après la question 14, la matrice A est donc nilpotente.

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ triangulaire à diagonale nulle est nilpotente.}}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On sait d'après le cours que A est trigonalisable car $\chi_A = X^n$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. La matrice A est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T (par exemple) avec les valeurs propres de A sur la diagonale (car A et T sont semblables et elles ont donc le même polynôme caractéristique) . Mais comme 0 est la seule valeur propre de A,

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle.}}$$

Q17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p et $P = X^p Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$.
Alors, comme $P(A) = A^p Q(A)$ et que $A^p = 0$, on a bien $P(A) = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{si } P \in \mathbb{C}[X] \text{ est multiple de } X^p \text{ et } A \text{ nilpotente d'indice } p, \text{ alors } P(A) = 0.}$$

Q 18. Comme P est un polynôme annulateur de A, on sait d'après le cours que toute valeur propre de A est racine de P. Or 0 est valeur propre de A nilpotente d'après la question 12. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente et } P \text{ annulateur de } A, \text{ alors } 0 \text{ est racine de } P.}$$

Q19. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on peut écrire $Q = \alpha \prod_{k=1}^{q} (X - \lambda_k)^{m_k}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ sont les différentes racines de Q et $m_1, \ldots, m_q$ leurs multiplicités respectives, et α complexe non nul. Comme $Q(0) \neq 0$, aucune de ces racines n'est nulle. On a par ailleurs $Q(A) = \alpha \prod_{k=1}^{q} (A - \lambda_k I_n)^{m_k}$ d'après les relations sur les polynômes de matrice.
Or, pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant q$, le complexe λ_k n'est pas valeur propre de A puisque $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ d'après la question 12, ainsi la matrice $A - \lambda_k I_n$ est inversible. En tant que produit de puissances de matrices inversibles :

$$\boxed{Q(A) \text{ est inversible.}}$$

Comme $P(A) = A^m Q(A) = 0$, en multipliant à droite par $Q(A)^{-1}$, on obtient $A^m = 0$. Mais par définition de l'indice de nilpotence de A, $A \neq 0, A^2 \neq 0, \ldots, A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$, ce qui justifie que $m \geqslant p$. Ainsi,

$$\boxed{P = X^m Q = X^p (X^{m-p} Q) \text{ est bien un multiple de } X^p.}$$

Partie IV – Racines carrées de matrices nilpotentes

Q20. Comme les deux dernières colonnes de A sont respectivement 3 fois et -7 fois la première qui est non nulle, on a $\mathrm{rg}(A) = 1$. Il vient donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1 \text{ et } \mathrm{tr}(A) = 1 + 6 - 7 = 0.}$$

D'après le cours, on sait que l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_A est supérieur ou égal à $\dim(E_0(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$ or $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 1 = 2$ par la formule du rang. Ainsi, $(X - 0)^2 = X^2$ divise χ_A. Par conséquent, comme χ_A est de degré 3 et unitaire, on a $\chi_A = X^3 + aX^2$. De plus, le cours nous apprend que $a = -\mathrm{tr}(A) = 0$ car $\chi_A = X^3 - \mathrm{tr}(A) X^2 + \ldots - \det(A)$. Finalement,

$$\boxed{\chi_A = X^3.}$$

Par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^3 = 0$ donc A est nilpotente. Un calcul élémentaire montre que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$ d'où

$$\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice 2.}}$$

Q21. On cherche à montrer que A est semblable à $\mathrm{diag}(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$ ce qui revient, par la formule de changement de base, à trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$.
Il s'agit donc de trouver v_1, v_2, v_3 linéairement indépendants tels que $u(v_1) = v_2$, $u(v_2) = u(v_3) = 0$.
Procédons par ordre :
- on cherche v_2 tel que $v_2 = u(v_1) \neq 0$ or, comme $\mathrm{rg}(u) = 1$ et $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(X)$, il suffit de prendre $v_2 = X = (1, 2, 1)$.
- on cherche v_1 tel que $u(v_1) = v_2$ ce qui nous conduit à prendre par exemple $v_1 = e_1 = (1, 0, 0)$ d'après la matrice A.
- on cherche v_3 tel que $u(v_3)$ donc $v_3 \in \mathrm{Ker}(u)$ et on montre facilement que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}((3, -1, 0), (7, 0, 1))$, il

suffit de prendre n'importe quel vecteur de ce plan qui n'est pas colinéaire à v_2, par exemple $v_3 = (3, -1, 0)$.
Réciproquement, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est bien une base de $\mathbb{C}^3$ car en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$, on a $\det(P) = 1 \neq 0$ donc P est inversible.
Par construction, $u(v_1) = v_2$, $u(v_2) = u(v_3) = 0$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$. Comme A est la matrice de u dans la base canonique, A et T représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes donc elles sont semblables. Plus précisément, la matrice P définie ci-dessus étant la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a

$$\boxed{A = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(J_2, J_1) \text{ ; de plus } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

car on a clairement $e_1 = v_1$, $e_2 = 3v_1 - v_3$ et $e_3 = v_2 - 2e_2 - e_1 = v_2 + 2v_3 - 6v_1 - v_1 = -7v_1 + v_2 + 2v_3$.

Q22. Si $R^2 = A$, comme $A^2 = 0$, il vient $R^4 = (R^2)^2 = A^2 = 0$ donc R est nilpotente. Puisque $R^2 = A$, on a $\rho^2 = u$. Ainsi, $\rho \circ u = \rho^3 = u \circ \rho$ donc ρ et u commutent. On sait d'après le cours qu'alors

$$\boxed{\mathrm{Im}(u) \text{ et } \mathrm{Ker}(u) \text{ sont stables par } \rho \text{ et } \rho \text{ est nilpotent car } R \text{ l'est.}}$$

Q23. Soit toujours $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = A$, posons $R' = P^{-1}RP$ comme proposé par l'énoncé avec la matrice P de la question 21. Par la formule de changement de base, R' est la matrice de ρ dans la base $\mathcal{B}$.
- Comme $\mathrm{Im}(u)$ est stable par ρ, il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que $\rho(v_2) = dv_2$.
- Comme $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par ρ, il existe $(e, f) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\rho(v_3) = ev_2 + fv_3$.
- Il existe aussi $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\rho(v_1) = av_1 + bv_2 + cv_3$.

Ainsi, $R' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & e \\ c & 0 & f \end{pmatrix}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, en développant le déterminant $\chi_{R'}(\lambda) = \det(\lambda I_3 - R')$ par rapport à la première ligne, on obtient directement $\chi_{R'}(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - d)(\lambda - f)$ donc $\chi_{R'} = (X - a)(X - d)(X - f)$. Mais comme R' est nilpotente, car ρ l'est, d'après la question 22, on a $\chi_R = X^3$ d'après la question 14. Par conséquent : $a = d = f = 0$ d'où $R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & e \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors $R'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ce & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $R^2 = A$ équivaut à $R'^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = T$, la condition $R^2 = A$ se traduit par $ce = 1$. On obtient donc $R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1/c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}^*$.
Réciproquement, si R' est de la forme précédente, alors $R'^2 = T$ (par calcul) donc $R^2 = PR'^2P^{-1} = PTP^{-1} = A$.
Ainsi, par double implication, pour $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on a l'équivalence :

$$\boxed{R^2 = A \Longleftrightarrow R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1/c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{C} \text{ et } c \in \mathbb{C}^*.}$$

Comme $R = PR'P^{-1}$, on a la nouvelle équivalence grâce à la question 21, toujours pour $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\boxed{R^2 = A \Longleftrightarrow R = \begin{pmatrix} b + 3c & 3b + 9c - (1/c) & (2/c) - 7b - 21c \\ 2b - c & 6b - 3c - (2/c) & (4/c) - 14b + 7c \\ b & 3b - (1/c) & (2/c) - 7b \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{C} \text{ et } c \in \mathbb{C}^*.}$$

Q24. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = J_3$, alors $\boxed{R^4 = (R^2)^2 = J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{3,1}}$ (matrice élémentaire) donc $\boxed{R^6 = R^4R^2 = J_3E_{3,1} = 0.}$ Comme R est nilpotente, $\chi_R = X^3$ d'après la question 14, donc $R^3 = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On en déduit que $R^4 = R^3 R = 0$ ce qui est incompatible avec $R^4 = E_{3,1}$.

$$\boxed{\text{Il n'existe donc aucune solution de l'équation } R^2 = J_3 \text{ dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).}$$

Q25. On raisonne par l'absurde en considérant une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = V$. Comme $V^p = 0$, on a $R^{2p} = (R^2)^p = V^p = 0$ donc R est nilpotente. À nouveau, d'après la question 14, $\chi_R = X^n$ donc $R^n = 0$ (toujours Cayley-Hamilton). Or, par hypothèse, on a $2p - 1 > n$ donc $2p - 2 \geqslant n$. Mais V est nilpotente d'indice p donc $V^{p-1} = (R^2)^{p-1} = R^{2p-2} \neq 0$. Ceci est impossible car $2p - 2 - n \geqslant 0$ et $R^{2p-2} = R^n R^{2p-2-n} = 0 \times R^{2p-2-n} = 0$.

$$\boxed{\text{Si } V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est nilpotente d'indice } p \text{ tel que } 2p - 1 > n,\ V \text{ n'a pas de racine carrée dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

Q26. Soit $n \geqslant 3$. Posons $V = \operatorname{diag}(A, 0_{n-3})$ où A est la matrice définie en $IV.1$).
Par calcul sur les matrices blocs, on a $V^2 = \operatorname{diag}(A^2, 0_{n-3}^2) = 0_n$ car A est nilpotente d'indice 2 d'après **Q20**. Ainsi, V est nilpotente d'indice $p = 2$ (car $V \neq 0_n$).
Par ailleurs, par **Q23**, on sait que A admet au moins une racine carrée. Notons R une racine carrée de A.
Alors $(\operatorname{diag}(R, 0_{n-3}))^2 = \operatorname{diag}(R^2, 0_{n-3}^2) = \operatorname{diag}(A, 0_{n-3}) = V$ donc $\operatorname{diag}(R, 0_{n-3})$ est une racine carrée de V.

$$\boxed{V = \operatorname{diag}(A, 0_{n-3}) \text{ répond au problème posé.}}$$