Exercices

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n personnes déposent leur chapeau à un vestiaire et repartent en prenant chacun un chapeau au hasard.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes partant avec leur chapeau. Déterminer $\mathrm{E}(X)$.
Indication : on écrira X comme somme de n variables aléatoires.

Exercice 2. Une usine confectionne des pièces dont une proportion p (inconnue) est défectueuse. On effectue un prélèvement de n pièces. On note Z_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement.
On suppose que le prélèvement se fait une une population très grande, ainsi on peut le considérer comme suite de n tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la loi de Z_n ? En déduire son espérance et sa variance.
2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \mathrm{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition suffisante sur n pour que $\frac{Z_n}{n}$ approche p avec une précision de 10^{-2} avec une probabilité d'au moins 95%.

Exercice 3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-uplet de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
On définit pour tout $i \in [\![1\,;n-1]\!]$: $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Déterminer la loi de Y_i pour $i \in [\![1\,;n-1]\!]$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} Y_i$.

Exercice 4. Soit r boules numérotées de 1 à r et n tiroirs numérotés de 1 à n, avec $n \geqslant 2$. On place au hasard chacune des r boules dans l'un des tiroirs de manière équiprobable et indépendamment les unes des autres.
On définit les variables aléatoires suivantes :

- V est le nombre de tiroirs restés vides ;
- T est le nombre de boules placées dans le tiroir 1.

Déterminer $\mathrm{E}(T), \mathrm{E}(V)$ et $\mathrm{Cov}(T, V)$.
Indication : on écrira T et V comme sommes de n variables aléatoires.

Exercice 5. On dispose d'une pièce déséquilibrée qui donne pile avec probabilité $\frac{2}{3}$. On effectue une suite de lancers.
Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \mathrm{P}(Z = n)$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3.
2. Montrer que : $\forall n \geqslant 3, a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}$.
3. En déduire la loi de Z et vérifier par le calcul que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(Z = n) = 1$.
4. Montrer que la variable aléatoire Z est d'espérance finie et la calculer.

Exercice 6. Un mobile se déplace sur un axe gradué. Au départ, le mobile est à l'origine. Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $(n+1)$, il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du point où se trouve le mobile à l'instant n et $u_n = \mathrm{P}(X_n = 0)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![1\,;n+1]\!]$:
$$\mathrm{P}(X_{n+1} = k) = \frac{k}{k+1}\mathrm{P}(X_n = k-1).$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0\,;n]\!]$:
$$\mathrm{P}(X_n = k) = \frac{1}{k+1}u_{n-k}.$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$. En déduire u_0, u_1, u_2, u_3.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{E}(X_{n+1}) = \mathrm{E}(X_n) + u_{n+1}$.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\mathrm{E}(X_n)$ sous forme de somme.
5. On note T l'instant de premier retours à l'origine s'il a lieu et T vaut 0 si le mobile ne revient jamais à l'originie.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.
En déduire $\mathrm{P}(T = 0) = 0$.
La variable aléatoire T est-elle d'espérance finie ?

Exercice 7. Soit $x \in]0\,;1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité d'échec x, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le rang du $n^{\text{ième}}$ succès et pour tout $k \in \mathbb{N}^*, T_k$ le nombre de succès lors des k premières épreuves.

1. Déterminer la loi de S_1 et la loi de T_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(S_n = k)$ en fonction de T_{k-1}. En déduire la loi de S_n.
3. En déduire que pour tout $x \in]0\,;1[$, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

Exercices CCINP

Exercice 8 (CCINP 97).
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 9 (CCINP 98). Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 10 (CCINP 100). Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

Exercice 11 (CCINP 102). Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$
   c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \min\left(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\right)$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Exercice 12 (CCINP 111). On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall\, (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.