DM7 - polynomes - integrale

2025-2026

Exercice 1 :

On considère la matrice suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cet exercice propose une technique permettant de calculer la puissance n-ième de la matrice N en utilisant les polynômes. Pour cela, on va commencer par définir les polynômes de matrices :

Définition : polynôme de matrice

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $(n \in \mathbb{N})$, et pour $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ $(m \in \mathbb{N})$, on définit la matrice $P(M)$ par $P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k$.

Par exemple, si $P = X^2 + X - 2$, on aura $P(M) = M^2 + M - 2I_m$.

Remarquez le $2I_m$ qui apparait à la place de la constante, qui provient de M^0.
On admet le résultat ci dessous (que vous montrerez l'an prochain) :

Propriété :

si P et Q sont deux polynômes, la matrice $(PQ)(M)$ est égale à la matrice $P(M)Q(M)$.

Par exemple, si on prend $P = X^3 + 1$, alors $P(M) = M^3 + I_m$, mais aussi, comme $P(X) = (X+1)(X^2 - X + 1)$, on a également $P(M) = (M + I_m)(M^2 - M + I_m)$.

Définition : polynôme annulateur

On appelle **polynôme annulateur** d'une matrice M tout polynôme P tel que $P(M) = O_m$.

On est maintenant armé pour l'exercice :

1. Déterminez deux entiers a et b tel que $N^2 = aN + bI_3$.
2. En déduire que N est inversible et précisez N^{-1}.
3. A l'aide de la question 1, déterminer un polynôme annulateur de N, de degré 2. On note P ce polynôme.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminez le reste de la division euclidienne de X^n par P. On notera R_n ce reste.
5. Justifiez que $N^n = R_n(N)$ et en déduire N^n.

1. En calculant N^2, on trouve $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

   En observant attentivement N^2 et N (hors coefficient diagonaux), on reconnait $-2N$. La diagonale s'obtient en ajoutant 3 partout, et donc $\boxed{N^2 = -2N + 3I}$.

2. D'après la relation précédente, on a $N^2 + 2N = 3I$ donc $N\frac{1}{3}(N + 2I_3) = I$

   Les matrices sont carrées, donc N est inversible, et son inverse est

$$\frac{1}{3}(N + 2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. A la question 1, on a montré que $N^2 = -2N + 3I$, donc $N^2 + 2N - 3I = O_3$.
   Ainsi, $P = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de N.
4. On sait que

$$X^n = (X^2 + 2X - 3)Q + R_n(X)$$

   avec $deg(R_n) < 2$. Ainsi, $R_n(X) = a_n X + b_n$ avec a_n et b_n réels.
   Or $X^2 + 2X - 3$ admet deux racines : 1 et -3.
   On a donc, en évaluant la relation au dessus en 1 et -3, que :

$$\begin{cases} 1 & = 0 + a_n + b_n \\ (-3)^n & = 0 - 3a_n + b_n \end{cases}$$

   Ainsi $a_n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)$ et $b_n = \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)$

   C'est à dire $R_n(X) = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)X + \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)$

5. Comme $X^n = (X^2 + 2X - 3)Q + R_n(X)$, on a $N^n = (N^2 + 2N - 3)Q(N) + R_n(N)$ et comme $N^2 + 2N - 3 = \mathcal{O}_3$, on a directement $N^n = R_n(X)$, d'où

$$N^n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)N + \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)I_3$$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt$.

1. a) Soit $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$. Justifiez que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire l'ensemble de définition de f.
2. Montrez que f est impaire (on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$.)
3. On rappelle pour cette question le résultat suivant :

Propriété : croissance de l'intégrale

Soient a et b deux réels avec $a < b$, et soient u et v deux fonctions continues sur $[a, b]$. Si pour tout $t \in [a, b]$, $u(t) \leq v(t)$, alors $\int_a^b u(t)dt \leq \int_a^b v(t)dt$.

   a) Montrez que pour tout $t > 0$,
$$\frac{1}{t+2} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} \leq \frac{1}{t}$$
   b) En déduire que, pour tout $x > 0$,
$$\ln\left(\frac{2x+2}{x+2}\right) \leq f(x) \leq \ln(2)$$
   c) Que vaut $\lim_{x\to+\infty} f(x)$? et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?
4. a) Soit G une primitive de g. Exprimez f en fonction de G.
   b) Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et montrez que
$$f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{4+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$$
   c) En déduire le tableau de variation de f, en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

---

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4 + x^2 > 0$, donc g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   Par composition et quotient de fonctions continues, elle est continue sur $\mathbb{R}$.
   b) Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, g est continue sur $[x, 2x]$ (si $x \geq 0$) ou $[2x, x]$ (si $x \leq 0$) et donc $\int_x^{2x} g(t)dt$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc $\boxed{\text{définie sur } \mathbb{R}.}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt$.
   On effectue le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ $u = -t$ (donc $du = -dt$) ce qui donne
$$f(-x) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(-u)^2}} du = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(u)^2}} du = -f(x)$$
   Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire.}}$
3. a) pour tout $t > 0$, $4t > 0$, donc $4 + t^2 < 4 + 4t + t^2 = (2 + t)^2$ et $4 + t^2 > t^2$. En prenant la racine dans ces inégalités (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante), on obtient
$$|t| \leq \sqrt{4+t^2} \leq |t+2|$$
   Comme $t > 0$ et $t + 2 > 0$, on peut enlever les valeurs absolues, et par passage à l'inverse, il vient :
$$\boxed{\frac{1}{t+2} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} \leq \frac{1}{t}}$$
   b) Pour $x > 0$, $2x > x$ et par croissance de l'intégrale, on en déduit :
$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+2} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$
   d'où
$$[\ln(t+2)]_x^{2x} \leq f(x) \leq [\ln(t)]_x^{2x}$$
   c'est à dire
$$\boxed{\ln(\frac{2x+2}{x+2}) \leq f(x) \leq \ln(\frac{2x}{x}) = \ln(2)}$$

c) comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{x+2} = 2$, on a $\lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{2x+2}{x+2}) = \ln(2)$ et par le théorème d'encadrement, on en déduit

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)}$$

Par imparité (et surtout pas en réutilisant l'inégalité précédente, qui n'est valable que pour $x > 0$), on $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\ln(2)}$.

4. a) Par définition de l'intégrale, on a $f(x) = [G(t)]_x^{2x}$, d'où $f(x) = G(2x) - G(x)$

b) Comme G est une primitive, G est une fonction dérivable, à dérivée continue (puisque g l'est), donc G est de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $f(x) = G(2x) - G(x)$, alors par somme et composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a alors $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x)$

$$\boxed{f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{4+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}}$$

c) Plusieurs façon de faire :

-En mettant au même dénominateur, on obtient $f'(x) = \frac{2\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4+4x^2}}{\sqrt{4+4x^2}\sqrt{4+x^2}}$

On résout maintenant $2\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4+4x^2} \geq 0$:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4+4x^2} \geq 0 &\Leftrightarrow 2\sqrt{4+x^2} \geq \sqrt{4+4x^2} \\
&\underset{\text{les deux termes sont toujours positifs}}{\Leftrightarrow} 4(4+x^2) \geq 4+4x^2 \\
&\Leftrightarrow 16 \geq 4 \\
&\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Finalement $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
f est donc croissante. (et même strictement)
Mais le plus rapide est d'écrire que

$$2\frac{1}{\sqrt{4+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} = 2\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$$

Et comme $\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{4+x^2}$, on a directement $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} > 0$

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
f	$-\ln(2)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$