Devoir surveillé nº 4

jeudi 23 janvier 2025
4 heures · 12h45-16h45

Présentation générale de la copie

- ☐ **Sur la première copie uniquement :** NOM Prénom, classe, référence du devoir, place pour les annotations.
- ☐ **Sur les copies suivantes :** NOM et numéro de la copie en bas à droite
- ☐ Feuilles rangées dans l'ordre
- ☐ Marge à gauche de 4 cm sur toutes les pages
- ☐ Rien dans la marge **sauf** les numéros de questions
- ☐ Correcteur blanc et crayon de papier interdits
- ☐ Résultats mis en évidence
- ☐ **FIN** écrit à la fin du devoir.

Rédaction

- ☐ Phrases délimitées par points et majuscules ;
pas d'usage abusif des virgules
- ☐ Écriture lisible et sur les lignes
- ☐ Pas d'abréviations
- ☐ Orthographe convenable
- ☐ Correction de la langue (pas de « on a que »)

Rédaction mathématique

- ☐ Pas de formule déconnectée du raisonnement
- ☐ Usage de $\forall$ / $\exists$: **toujours devant une formule**
- ☐ Usage de $\Longleftrightarrow$ / « donc » / $\Rightarrow$
- ☐ Variables toujours introduites :
  - dans le texte (« Soit $x \in \cdots$ »)
  - et dans les formules ($\forall / \exists\, x \in \cdots$)
- ☐ Nature des objets cohérente

Connaissance du cours

Commencez par répondre aux questions suivantes en 1 heure maximum. Cette partie du devoir sera ramassée à 13h45.

Intégration

1) Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et déterminer leur valeur lorsqu'elles le sont :

$$\textbf{a.}\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} \qquad \textbf{b.}\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{c.}\ \int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-t^3}\,\mathrm{d}t.$$

2) Décomposer en éléments simples :

$$F(X) = \frac{X^4}{X^2+2X+1}$$

3) Justifier que $f : t \mapsto t\,\mathrm{e}^{-\lfloor t \rfloor}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Probabilités

Dans toute cette partie, on travaille dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$.

4) Énoncer la formule des probabilités totales (du cours de deuxième année).

5) Dans le jeu de pile ou face illimité, on dispose des événements P_k : « obtenir "pile" au k^{e} lancer » pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Sans utiliser l'événement impossible ni l'événement certain, donnez *sans justification* un système complet d'événements :

- **a.** contenant exactement 2 événements ;
- **b.** contenant exactement 3 événements ;
- **c.** contenant une infinité d'événements.

6) Toujours dans ce modèle, on suppose que la probabilité d'obtenir "pile" lors d'un lancer vaut $p \in]\,0\,;1\,[$.
Soit A l'événement « obtenir une infinité de fois "pile" ».

- **a.** Exprimer l'événement A à l'aide des événements P_k.
- **b.** Calculer $\mathrm{P}(A)$.
- **c.** Comment appelle-t-on un tel événement A ?

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements.
Rappelez la définition de la phrase « les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants ».

8) Rappelez tout ce que vous savez sur les lois binomiales.

La suite du devoir doit être rédigée sur une copie séparée (avec sa propre en-tête).
Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.

Exercice

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Sur ce même espace, on définit une autre variable aléatoire Y par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \ Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) = 0 \text{ ou } X(\omega) \text{ est impair ;} \\ \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \neq 0 \text{ et } X(\omega) \text{ est pair.} \end{cases}$$

1) Que signifie le fait d'affirmer que X suive la loi de Poisson de paramètre λ ?

2) Justifier *soigneusement* que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

3) Exprimer l'événement $[Y = 0]$ à l'aide d'événements faisant intervenir X ; en déduire $\mathrm{P}(Y = 0)$.

4) Calculer $\mathrm{P}(Y=n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

5) On suppose que la variable aléatoire Y est nulle. Quelle est la probabilité que X soit nulle ?

6) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

On note $p_n = \mathrm{P}(Y=n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On donne le résultat :

$$p_0 = \frac{1+2\,\mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \geqslant 1,\ \ p_n = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}.$$

7) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,p_n$ est convergente et déterminer sa somme.
*Il s'agit de l'**espérance** de la variable aléatoire Y, c'est-à-dire sa moyenne théorique.*

8) Démontrer que Y est bien, comme annoncé, une variable aléatoire discrète.

Problème

File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$.
On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$, il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k, et 0 sinon.
On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]\,0,1\,[$.
On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n=0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n=1$, etc.
Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle **fonction génératrice de X** la somme de la série entière $\sum\limits_{j\geqslant 0} \mathrm{P}(X=j)\,t^j$. Cette fonction est notée G_X, de sorte que :

$$\mathrm{G}_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X=j)\,t^j$$

pour tous les réels t pour lesquels la série numérique converge.

I — Temps d'arrivée du n-ième client

1) On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1.
Démontrer par le calcul que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(T_1=k) = (1-p)^{k-1}\,p.$$

Comment s'appelle la loi de T ?

2) On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».
Exprimer A en fonction des événements $\{T_1=k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathrm{P}(A)$. Interpréter.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.

4) À l'aide de la fonction G_{T_1}, déterminer la valeur de l'espérance de T_1, qui est donnée par :

$$\mathrm{E}(T_1) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\,\mathrm{P}(T_1=j).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n.

5) Déterminer la loi conjointe du couple (T_1, T_2).
En déduire que les variables T_1 et T_2 sont indépendantes et de même loi.

On note $D_n = T_1 + \cdots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
On admet que les variables $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) et qu'en conséquence, leurs fonctions génératrices vérifient :

$$\forall\, t \in \,]-R,R[\,, \quad \mathrm{G}_{D_n}(t) = \big(\mathrm{G}_{T_1}(t)\big)^n.$$

6) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de $x=0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

7) En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathrm{P}(D_n=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k<n, \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n\,(1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

II — Étude du comportement de la file

Une suite récurrente

Soient $a>0$ et $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\big(a\,(x-1)\big). \end{array}$

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_1 \in \,]\,0,1\,[\quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ z_{n+1} = f(z_n).$$

8) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in \,]\,0,1\,[$ et que $z_{n+1}-z_n$ est du même signe que z_2-z_1.

9) En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [\,0,1\,]$ vérifiant $f(\ell)=\ell$.

10) Soit la fonction $\psi: \begin{array}{rcl}]\,0,1\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) - a\,(x-1). \end{array}$

Montrer que pour tout $x \in \,]\,0,1\,]$, on a :

$$\begin{array}{rrcl} & 0 \leqslant \psi(x) & \Longleftrightarrow & f(x) \leqslant x \\ \text{et :} & \psi(x) = 0 & \Longleftrightarrow & f(x) = x. \end{array}$$

11) **On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.**
Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x=1$.
En déduire que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

12) On suppose dans cette question que $a > 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.
En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha,1[$, montrer que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.

Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $\{V_k = 0\}$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

13) Rappeler l'ensemble des valeurs possibles de S ainsi que la probabilité associée à chacune de ces valeurs.

14) Quelle est la situation concrète décrite par l'événement

$$Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{V_n = 0\} \ ?$$

15) Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1,n]\!]$?

16) Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathrm{P}(V_1 = k \mid S = n)$.
En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

17) On note $z_n = \mathrm{P}(V_n = 0)$.
Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que $\mathrm{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

18) Justifier que pour tout $(j,n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathrm{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) = \big(\mathrm{P}(V_n = 0)\big)^j .$$

On distinguera le cas $j = 0$.

19) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$z_{n+1} = \exp\big(\lambda\, p\,(z_n - 1)\big).$$

20) Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter.