Devoir surveillé n° 4+

jeudi 23 janvier 2025
4 heures · 12h45-16h45

Problème *d'après Centrale TSI 2024 épr. 1*

Nombres de Fubini

Dans tout ce sujet, on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n (n entier). Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé et $P^{(j)}$ le polynôme dérivé d'ordre j de P de telle sorte que $P = P^{(0)}$, $P' = P^{(1)}$, $P'' = P^{(2)}$, etc.

On pourra confondre un polynôme et sa fonction polynomiale associée. De même, on pourra confondre le polynôme dérivé P' avec la fonction dérivée de la fonction polynomiale P.

On rappelle également que la partie entière d'un réel x est un entier, noté $\lfloor x \rfloor$, et que celle-ci vérifie la double inégalité $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

I — Préliminaires

On considère la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par $G_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad G_{n+1}(X) = X\left(G_n(X) + (1+X)\,G_n'(X)\right).$$

1) Justifier que $G_1 = X$ puis donner la forme développée du polynôme G_2.

2) Donner sans justification le rayon de convergence R_0 de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} x^k$ et exprimer sa fonction somme, notée D_0, à l'aide des fonctions usuelles.

Pour tout entier naturel n, on note R_n le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 1} k^n\, x^k$ et on note $D_n\colon\ ]-R_n, R_n[\ \to \mathbb{R}$ sa fonction somme donnée par

$$D_n\colon\ x \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} k^n\, x^k.$$

3) Justifier que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en déduire la valeur de R_n pour tout entier naturel n.

4) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout $x \in\ ]-R_n, R_n[$, on a $D_{n+1}(x) = x\, D_n'(x)$.

5) Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout $x \in\ ]-R_n, R_n[$, on a

$$D_n(x) = \frac{1}{1-x}\, G_n\!\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

II — Nombres de Fubini

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k.$$

Dénombrement

6) Justifier que $F_1 = 1$ et déterminer les entiers F_2 et F_3.

On rappelle qu'une partition d'un ensemble E non vide est un ensemble de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion constitue l'ensemble de départ E. Une partition ordonnée de E est un p-uplet $(X_1, \dots, X_p)$ tel que $\{X_1, \dots, X_p\}$ est une partition de E.
Par exemple, les trois partitions ordonnées de l'ensemble $\{1,2\}$ sont :

$$\big(\{1\},\{2\}\big), \qquad \big(\{2\},\{1\}\big) \qquad \text{et} \qquad \big(\{1,2\}\big).$$

Par convention, on pose qu'il existe une seule partition ordonnée de l'ensemble vide. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de partitions ordonnées de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

7) Déterminer les partitions ordonnées de l'ensemble $\{1,2,3\}$, puis leur nombre.

8) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{n-k}.$$

Pour construire une partition ordonnée, on pourra commencer par choisir le cardinal de la première partie formant cette partition.

9) En conclure que les suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales.

Majoration des nombres de Fubini

10) Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle avec son domaine de validité et justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} \leqslant 1$ pour tout entier naturel n non nul.

11) En raisonnant par récurrence forte, démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{F_n}{n!} \leqslant \frac{1}{(\ln 2)^n}.$$

12) En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n}{n!}\, z^n$.

Interprétation probabiliste et minoration des nombres de Fubini

Pour $x \in]-R,R[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$.

On peut montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et que ses dérivées successives s'expriment à l'aide des polynômes G_n définis dans la partie **Préliminaires** sous la forme :

$$\forall x \in]-R,R[\,, \quad f^{(n)}(x) = G_n\left(\frac{1}{2e^{-x}-1}\right) f(x).$$

On pourra librement utiliser cette expression admise de $f^{(n)}$ valable pour tout entier naturel n.

13) Rappeler le lien existant entre les dérivées successives de f et les coefficients de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{F_n}{n!} x^n$ puis prouver que, pour tout entier naturel n, on a

$$F_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{2^k}. \qquad (*)$$

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ qui suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g_n : \quad t \longmapsto t^n\, e^{-t\ln 2}.$$

14) Rappeler quel est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et rappeler la valeur de $P(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

15) Décrire une expérience aléatoire simple où une variable aléatoire X va suivre une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Sous les hypothèses ainsi posées, démontrer que X suit effectivement cette loi.

16) Soit a un réel strictement positif que l'on suppose non entier. Montrer que

$$\mathrm{P}(X \geqslant a) = \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}}.$$

Le théorème de transfert affirme que si Y est une variable aléatoire discrète et que f est une fonction définie sur $Y(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors la variable aléatoire $f(Y)$ admet pour espérance :

$$\mathrm{E}\big(f(Y)\big) = \sum_{k \in Y(\Omega)} f(k)\,\mathrm{P}(Y=k).$$

17) Dans la formule ci-dessus, justifier l'existence de la somme dans le membre de droite, et dire à quel ensemble elle appartient.

18) Soit n un entier naturel non nul.
Montrer que $\mathrm{E}(X^n) = 2F_n$.

19) Pour n non nul, justifier que g_n admet un maximum sur $[0,+\infty[$, noté M_n, que l'on explicitera.

20) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que

$$\mathrm{E}(X^n) \geqslant a^n\, \mathrm{P}(X \geqslant a)$$

pour tout réel a strictement positif.

21) En déduire la minoration

$$F_n \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{n}{e\ln 2}\right)^n.$$

On pourra admettre que $\ln 2$ *n'est pas un nombre rationnel.*

III — Équivalent de F_n

On rappelle que la fonction g_n a été définie juste avant la question **Q14**, pour tout entier naturel n, par :

$$g_n : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^n\, e^{-t\ln 2} \end{array}$$

et que quelques résultats la concernant, qui peuvent directement être réinvestis, ont déjà été établis dans la question **Q19**.

Valeur d'une intégrale

On rappelle le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées :

> *Soit u, v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I d'extrémités $a < b$ (finies ou infinies), à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
> *Si le produit uv admet une limite finie aux extrémités de I qui n'appartiennent pas à I, alors les intégrales $\int_a^b uv'$ et $\int_a^b u'v$ sont de même nature.*
> *En cas de convergence, on a la relation :*
> $$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt,$$
> *où la valeur de $u(t)\,v(t)$ en a est remplacée par sa limite en a si $a \notin I$; même chose en b.*

22) Montrer par récurrence que pour tout tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$ est convergente et vaut :

$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt = \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}.$$

Comparaison série/intégrale

Dans toute la suite de cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

23) Justifier qu'il existe un entier $N \geqslant 1$, dépendant de n, tel que g_n est croissante sur $[0\,;N]$ et décroissante sur $[N+1\,;+\infty[$.

24) Justifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} g_n(k) \leqslant \int_0^N g_n(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{N} g_n(k)$.

25) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant N+1} g_n(k)$ converge puis établir l'encadrement

$$\sum_{k=N+2}^{+\infty} g_n(k) \leqslant \int_{N+1}^{+\infty} g_n(t)\,dt \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} g_n(k).$$

26) En utilisant la relation $(*)$, déduire des encadrements précédents que

$$-\int_N^{N+1} g_n(t)\,dt \leqslant 2F_n - \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \leqslant g_n(N) + g_n(N+1) - \int_N^{N+1} g_n(t)\,dt.$$

27) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{M_n}{2} \leqslant F_n - \dfrac{n!}{2(\ln 2)^{n+1}} \leqslant M_n$ puis en déduire l'équivalent suivant :

$$F_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{2\,(\ln 2)^{n+1}}.$$