Devoir Surveillé n° 5 sujet 1.
le 9 janvier.

Exercice 1

Dans cet exercice, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Q1. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$

Q2. Déterminer une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$

Q3. Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage P

Q4. Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, a l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A et I_2.

Exercice 2

Q5. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.
En remarquant que, pour $k \geqslant 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).

Q6. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge.

Q7. Exemple.
Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$

b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Q8. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

Q9. On considère la série entière de la variable complexe $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

a) On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
Démontrer que la série de la variable réelle $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ (en particulier la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

b) On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.
pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leqslant 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathrm{Re}(z) \leqslant \cos\alpha$.
Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

c) Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
On pourra écrire :

$$D_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant \cos\alpha\}$$

et démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

d) On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k$.
Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \mathcal{R}e(z)$:

$$|F_n(z)| \leqslant \frac{2}{1-x} \leqslant \frac{2}{1-\cos\alpha}$$

e) Démontrer que la série entière $\sum \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α (pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

Problème

Introduction

Dans ce sujet, une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions L_a : $\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$

Q10. Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$, donner un équivalent de $1-x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.
Démontrer que pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

Remarque : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un point x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$.

Q11. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$.

Q12. On pose, pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.
Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

Q13. Expression sous forme de série entière.
On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p)\in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right) \text{ où } I_n = \{(k,p) \in A, kp = n\}.$$

Démontrer que pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p)\in A}$ est sommable.
En déduire que pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$.
($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

Q14. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n.
Exprimer pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q15. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers à n et inférieurs à n.
Justifier que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

On admet que pour $n \geqslant 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.

Q16. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Q17. Dans cette question et la suivante, pour $n \geqslant 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

En utilisant le théorème de la double limite calculer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q6.**

Q18. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.

On pourra remarquer que pour $x \in \left]0\,;1\right[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$.