Devoir Surveillé n° 5 sujet 2.
le 9 janvier.

Exercice 2

Q1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
En remarquant que, pour $k \geqslant 1, b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).

Q2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a) Démontrer que la série $\sum_{k \geqslant 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

b) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge.

Q3. Exemple.
Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$

b) Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

Q4. Si $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

Q5. On considère la série entière de la variable complexe $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

a) On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.
Démontrer que la série de la variable réelle $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$

(en particulier la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

b) On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.
pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leqslant 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathrm{Re}(z) \leqslant \cos\alpha$.
Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

c) Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
On pourra écrire :

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant \cos\alpha\}$$

et démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

d) On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$.
Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \mathcal{R}e(z)$:

$$|F_n(z)| \leqslant \frac{2}{1-x} \leqslant \frac{2}{1-\cos\alpha}$$

e) Démontrer que la série entière $\displaystyle\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α (pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

Notations et objectifs du problème

Dans tout le problème :

— n désigne un entier naturel non nul et l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est noté $[\![1, n]\!]$.

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $S_n(\mathbf{R})$, resp. $D_n(\mathbf{R})$, resp. $GL_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. symétriques, resp. diagonales, resp. inversibles) réelles de taille n, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;

— si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $M^\top$ sa transposée et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $M_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne ;

— on note $\pi(M)$ le nombre de valeurs propres réelles strictement positives de M comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\pi(I_n) = n$;

— si $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ on note $\mathrm{Diag}(u_1, \dots, u_n)$ la matrice $D \in D_n(\mathbf{R})$ telle que $D_{i,i} = u_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$;

— si f et g sont deux polynômes non simultanément nuls, on note $f \wedge g$ leur PGCD ;

— si f est un polynôme, on note également f sa fonction polynomiale associée ;

— on note $\sigma(f)$ le nombre de racines réelles de f appartenant à l'intervalle $]-1; 1[$, comptées avec leur multiplicité, ainsi par exemple $\sigma(X^2(X-1)(X+1)) = 2$;

— on dit que le réel α est une **racine stable** de f si $\alpha \neq 0$ et $f(\alpha) = f(\alpha^{-1}) = 0$;

— si f est un polynôme de degré $m \in \mathbf{N}$ et s'écrit

$$f = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k,$$

on note f_0 son polynôme réciproque, défini par

$$f_0 = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} X^k;$$

— on note $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^\top$ la matrice colonne de taille n dont le premier coefficient est égal à 1 et les autres à 0 ;

— on note S la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les $n-1$ coefficients situés juste au-dessus de la diagonale, égaux à 1 :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad S_{i,j} = \delta_{i+1,j} \text{ (symbole de Kronecker);}$$

— pour tout polynôme réel f on définit la matrice $J(f) \in S_n(\mathbf{R})$ par

$$J(f) = f_0(S)^\top f_0(S) - f(S)^\top f(S).$$

Dans ce problème p désigne un polynôme à coefficients réels, scindé sur $\mathbf{R}$ de degré n,

$$p = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \qquad a_n \neq 0,$$

et on note $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$ ses racines toutes réelles, comptées avec leurs multiplicités.

L'objectif du problème est d'établir l'égalité $\sigma(p) = \pi(J(p))$ (critère de Schur-Cohn) dans le cas où $J(p)$ est inversible, puis de proposer une démarche générale permettant de compter les racines de p dans $]-1;1[$, lorsque la matrice $J(p)$ n'est pas inversible.

Ces résultats, généralisables aux polynômes à coefficients complexes, sont utiles dans l'étude de la stabilité de certains systèmes dynamiques.

A. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1 ▷ Montrer que p_0, le polynôme réciproque de p, vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad p_0(x) = x^n p(1/x)$$

et en déduire que

$$p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X).$$

2 ▷ Montrer que $p \wedge p_0 = 1$ si et seulement si p ne possède pas de racine stable.

Jusqu'à la fin de la partie **A.** on suppose que toutes les racines de p sont stables et d'ordre de multiplicité 1.

3 ▷ Justifier qu'il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

Soit h le polynôme de degré n défini par $h(X) = Xp'$, où p' est le polynôme dérivé de p. On note h_0 et $(p')_0$ les polynômes réciproques respectifs de h et p'.

4 ▷ Montrer que $h = np - \lambda(p')_0$, puis que $h_0 = \lambda(np - Xp')$.

5 ▷ Vérifier que p' est scindé sur $\mathbf{R}$ puis montrer que $h \wedge h_0 = 1$ et en déduire que p' n'admet pas de racine stable.

B. Liberté d'une famille de polynômes

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on note f_j le polynôme

$$f_j = a_n(1-\alpha_n X)\cdots(1-\alpha_{j+1}X)(X-\alpha_{j-1})\cdots(X-\alpha_1) = a_n \prod_{k=j+1}^{n}(1-\alpha_k X)\prod_{k=1}^{j-1}(X-\alpha_k)$$

avec, selon les conventions habituelles, $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{n}(1-\alpha_k X) = \prod_{k=1}^{0}(X-\alpha_k) = 1$.

6 ▷ Montrer que s'il existe deux entiers i, k tels que $1 \leq i < k \leq n$ et $\alpha_i\alpha_k = 1$, alors α_i est racine de chaque polynôme f_j, où $j \in [\![1, n]\!]$, et que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est liée.

Jusqu'à la fin de la partie **B.** on suppose qu'aucune racine de p n'est stable.

On note E le sous-espace vectoriel des fractions rationnelles à coefficients réels dont les éventuels pôles sont des inverses de racines de p (on ne demande pas de justifier que E est un espace vectoriel). Les éléments de E sont donc les fractions rationnelles dont le dénominateur peut s'écrire comme produit fini, éventuellement égal à 1, de facteurs $(1 - \alpha_i X)$ où $1 \leq i \leq n$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on définit la fraction rationnelle $g_j \in E$ par

$$g_j = \frac{f_j}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i X)}$$

et l'application P_j, qui à une fraction rationnelle $f \in E$ associe la fraction rationnelle

$$P_j(f) = \frac{(1-\alpha_j X)f - (1-\alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X - \alpha_j}.$$

7 ▷ Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'application P_j est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

8 ▷ Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et tout $g \in E$, calculer $P_j\left(\dfrac{(X-\alpha_j)g}{1-\alpha_j X}\right)$.

9 ▷ En déduire que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

C. Expression de la matrice $J(p)$

10 ▷ Montrer que la famille $((S^\top)^i U)_{0 \leq i \leq n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Les matrices S et U ont été définies dans la partie préliminaire du problème.

Pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, on définit les matrices

$$B_j = S - \alpha_j I_n \qquad \text{et} \qquad C_j = I_n - \alpha_j\, S.$$

11 ▷ Démontrer que

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\top (C_j^\top C_j - B_j^\top B_j) f_j(S).$$

Les polynômes $f_1, \dots, f_n$ ont été définis dans le préambule de la partie **B**.

12 ▷ Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $C_j^\top C_j - B_j^\top B_j = (1-\alpha_j^2)UU^\top$.

13 ▷ On note D la matrice diagonale de taille n :

$$D = \mathrm{Diag}((1-{\alpha_j}^2)_{1 \leq j \leq n})$$

et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de V est $V_j = f_j(S^\top)\, U$. Montrer que

$$J(p) = VDV^\top.$$

14 ▷ En déduire, à l'aide de la question 6, que si p possède une racine stable alors $J(p)$ n'est pas inversible.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

On rappelle que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ alors $\pi(M)$ désigne le cardinal de l'ensemble de ses valeurs propres strictement positives, comptées avec leurs multiplicités.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de sa structure euclidienne canonique. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifie la condition $(\mathcal{C}_M)$ quand

$$\forall X \in F \setminus \{0_{n,1}\} \qquad X^\top M X > 0.$$

On note $d(M)$ la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, c'est-à-dire :

$$d(M) = \max\{\dim F \mid F \text{ s.e.v de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ vérifiant } (\mathcal{C}_M)\}.$$

15 ▷ Soit deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A = P^\top BP$. Montrer que $d(B) \geq d(A)$ puis que $d(B) = d(A)$.

16 ▷ Pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ construire un sous-espace vectoriel F_M de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$. On a donc $d(M) \geq \pi(M)$.

17 ▷ On veut montrer que pour toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ on a $\pi(M) = d(M)$. Par l'absurde, en supposant l'existence d'un sous-espace vectoriel G de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension $\dim G > \pi(M)$ vérifiant la condition $(\mathcal{C}_M)$, montrer $\dim(F_M^\perp \cap G) \geq 1$, en déduire une contradiction et conclure.

18 ▷ Démontrer le **critère de Schur-Cohn** :

Si $J(p)$ est inversible alors p ne possède aucune racine stable et $\sigma(p) = \pi(J(p))$.

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19 ▷ Montrer, à l'aide des questions 9 et 13, que si p n'admet pas de racine stable et si $J(p)$ n'est pas inversible alors il existe un polynôme q non nul à coefficients réels de degré au plus $n-1$ tel que $q(S^\top)\,U = 0_{n,1}$.

20 ▷ En déduire que la matrice $J(p)$ est inversible si et seulement si p n'admet aucune racine stable.

F. Un cas particulier

On suppose dans cette partie, comme on l'a fait aux questions 3 à 5, que toutes les racines de p sont stables et de multiplicité 1 et on note $h = Xp'$ (où p' est le polynôme dérivé de p) et h_0 le polynôme réciproque de h. On rappelle que, d'après la question 3, il existe un réel $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que $p = \lambda p_0$.

21 ▷ Montrer que $J(h)$ est inversible.

22 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $r \in]1-\eta; 1[$, le polynôme $p(rX)$

est scindé, admet exactement $\sigma(p)$ racines à l'intérieur de l'intervalle $]-1;1[$ et ne possède aucune racine stable.

Pour tout réel $r > 0$, on note $F(r) = J(p(rX))$.

23 $\triangleright$ Montrer que

$$\lim_{r \to 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)} F(r)\right) = n - \sigma(p).$$

24 $\triangleright$ Justifier que l'application $F : \mathbf{R}_+^* \to S_n(\mathbf{R})$ est dérivable et que

$$F'(1) = 2n(p(S))^\top p(S) - 2S^\top (p'(S))^\top p(S) - 2(p(S))^\top p'(S)S.$$

25 $\triangleright$ En déduire, à l'aide des résultats de la question 4, que

$$\frac{n}{2(r-1)} F(r) \underset{r \to 1}{=} J(h) + o(1).$$

On admet que l'application définie sur $S_n(\mathbf{R})$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ qui à une matrice symétrique associe le n-uplet de ses valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant, est continue.

26 $\triangleright$ En déduire que $\sigma(p) = n - 1 - \pi(J(p'))$.

G. Méthode générale.

On se place dans le cas général, sans disposer d'information sur la stabilité et la multiplicité des racines de p, et on cherche à calculer $\sigma(p)$.

On construit les deux polynômes f et g vérifiant $f = p \wedge p_0$ et $p = fg$.

27 $\triangleright$ Montrer que $\sigma(g) = \pi(J(g))$.

28 $\triangleright$ Proposer une méthode permettant de construire un nombre fini (éventuellement nul) de polynômes $g_1, \ldots, g_\ell$, dont les racines sont stables et de multiplicité 1, tels que $f = g_1 g_2 \cdots g_\ell$. Exprimer $\sigma(p)$ à l'aide de $n, \deg g, \pi(J(g)), \ell, \pi(J(g))$ ainsi que $\pi(J(g_1')), \ldots, \pi(J(g_\ell'))$.

FIN DU PROBLÈME