MinesMP 2025 - Epreuve 2
Un corrigé

A. Propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1. Pour tout $x \neq 0$, on a (changement d'indice $j = n - k$)

$$x^n p\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} x^j = p_0(x)$$

et ainsi

$$p_0(x) = a_n x^n \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{x} - \alpha_j\right) = a_n = \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j x)$$

L'identité des fonctions polynomiales en une infinité de points donne l'égalité des polynômes.

$$\boxed{p_0(x) = x^n p(1/x) \text{ et } p_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j X)}$$

2. si p possède une racine stable α alors $(x - \alpha) = \alpha(1 - x/\alpha)$ est un diviseur commun à p et p_0 qui ne sont pas premiers entre eux.
Réciproquement, si $p \wedge p_0 \neq 1$ alors p et p_0 ont un diviseur irréductible commun. Comme p est scindé, ce diviseur s'écrit $X - \alpha_i$ et il existe donc j tel que $X - \alpha_i$ et $1 - \alpha_j X$ sont associés ce qui entraîne $\alpha_i \neq 0$ et $\alpha_i \alpha_j = 1$: on a donc une racine stable.

$$\boxed{p \wedge p_0 = 1 \text{ si et seulement si } p \text{ ne possède pas de racine stable}}$$

3. Comme toutes les racines sont stables, elle sont non nulles et p_0 est de degré n et de coefficient dominant a_0.
Les α_i sont distincts car les multiplicités valent 1. Les $1/\alpha_i$ sont donc tous distincts aussi et sont racines de p_0. Par degré, on a donc

$$p_0(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} \left(X - \frac{1}{\alpha_i}\right) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

(puisque $\alpha \mapsto 1/\alpha$ est bijective de l'ensemble des racines dans lui même). On remarque alors que

$$a_0 = p(0) = a_n (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$$

et ainsi

$$p_0 = (-1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_i\right) p$$

Les α_i se regroupent par paires d'inverses sauf éventuellement 1 et -1 (qui sont leur propre inverse). Le coefficient devant p ci-dessus vaut donc 1 ou -1 et on a

$$\boxed{p = \lambda p_0 \text{ avec } \lambda \in \ \{-1, 1\}}$$

4. En dérivant la première relation de la question 1, on obtient

$$\forall x \neq 0,\ p_0'(x) = n x^{n-1} p\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} p'\left(\frac{1}{x}\right)$$

et ainsi ($p' = \lambda p_0'$)

$$\forall x \neq 0,\ h(x) = \lambda x p_0'(x) = \lambda \left(n x^n p\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-1} p'\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

Le premier terme de la parenthèse vaut $p_0(x)$ (et on obtient $p(x)$ en multipliant par λ). Comme p' est de degré $n-1$, le second vaut $(p')_0$ et ainsi (identité des polynômes en une infinité de points)

$$\boxed{h = np - \lambda (p')_0}$$

Avec la question 1, on a

$$\forall x \neq 0,\ (p')_0 \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^{n-1}} p'(x)$$

et ainsi

$$\forall x \neq 0,\ x^{n-1} (p')_0 \left(\frac{1}{x}\right) = p'(x)$$

On a donc, pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} h_0(x) &= x^n h\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^n \left(np\left(\frac{1}{x}\right) - \lambda (p_0)' \left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= n p_0(x) - \lambda x p'(x) \\ &= \frac{n}{\lambda} p(x) - \lambda x p'(x) \end{aligned}$$

Comme $1/\lambda = \lambda$, on conclut que

$$\boxed{h_0 = \lambda (np - Xp')}$$

(les fonctions polynomiales sont égale en une infinité de valeurs et les polynômes sont égaux)

5. Par théorème de Rolle, il y a une racine de p' entre deux racines de p. Les racines de p étant simples, p' possède au moins $n-1$ racines et comme p' est de degré n,

$$\boxed{p' \text{ est scindé simple sur } \mathbb{R}}$$

Si, par l'absurde, h et h_0 ont une racine x commune, alors $xp'(x) = 0$ et $np(x) - xp'(x) = 0$ et ainsi $p(x) = 0$. On a donc $x \neq 0$ (0 non racine de p car toutes les racines sont stables) et $p'(x) = 0$. x est ainsi racine double ce qui nest contraire à l'hypothèse des multiplicités valant 1. Or, h est scindé (car p' l'est et $h = Xp'$) et $\boxed{h \wedge h_0 = 1}$ (les divisieurs irréductibles de h sont de degré 1 et il n'y a pas de diviseur de degré 1 commun puisque pas de racine commune).
Si, par l'absurde, h possèdait une racine stable α, alors $1/\alpha$ serait racine de h et donc α racine de h_0 ce qui contredirait le fait que le pgcd vaut 1 (on aurait $X - \alpha$ diviseur commun). h n'a donc pas de racine stable et a fortiori,

$$\boxed{p' \text{ n'a pas de racine stable}}$$

B. Liberté d'une famille de polynômes

6. Si $\alpha_i \alpha_k = 1$ avec $i < k$ alors pour tout j,
ou bien $j - 1 \geq i$ et α_i est racine de f_j
ou bien $j \leq i$ et alors $j < k$ et $1/\alpha_k = \alpha_i$ est racine de f_j. Ainsi, $(X - \alpha_i)$ divise f_j et $f_j \in (X - \alpha_i)\mathbb{R}_{n-2}[X]$ qui est un espace de dimension $n - 1$. n éléments de cet espace formant une famille liée,

$$\boxed{\text{Si } \alpha_i \alpha_k = 1 \text{ avec } i < k \text{ alors } (f_1, \ldots, f_n) \text{ est liée}}$$

7. On a immédiatement linéarité de P_j ($P_j(f_1 + \lambda f_2) = P_j(f_1) + \lambda P_j(f_2)$). De plus α_i est racine de la fraction $(1 - \alpha_j X) f - \left(1 - \alpha_j^2\right) f(\alpha_j)$ et cette fraction s'écrit $(X - \alpha_j) f_1$ avec $f_1 \in E$ (car un pôle de f_1 est un pôle de f). Ainsi $P_j(f) \in E$. On a donc $P_j \in \mathcal{L}(E)$.
Si $P_j(f) = 0$ alors $(1 - \alpha_j X) f$ est une fraction constante. Ainsi $f \in \text{Vect}\left(\frac{1}{1-\alpha_j X}\right)$. La réciproque est une simple vérification et on a donc

$$\boxed{\ker(P_j) = \text{Vect}\left(\frac{1}{1 - \alpha_j X}\right)}$$

8. Le calcul donne immédiatement

$$\boxed{\forall g \in E,\ P_j\left(\frac{(X - \alpha_j)\, g}{1 - \alpha_j X}\right) = g}$$

9. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$. On a alors aussi

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k = 0 \qquad (*)$$

On a

$$g_j = \frac{a_n}{1 - \alpha_j X} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{X - \alpha_k}{1 - \alpha_k X}$$

et avec la question précédente

$$P_1(g_j) = \frac{a_n}{1 - \alpha_j X} \prod_{k=2}^{j-1} \frac{X - \alpha_k}{1 - \alpha_k X}$$

et même plus généralement

$$P_{j-1} \circ \cdots \circ P_1(g_j) = \frac{a_n}{1 - \alpha_j X}$$

et avec la question 7,

$$P_j \circ P_{j-1} \circ \cdots \circ P_1(g_j) = 0$$

Si on compose $(*)$ par $P_{n-1} \circ \ldots P_1$, il reste donc

$$\lambda_n \frac{a_n}{1 - \alpha_n X} = 0$$

et donc $\lambda_n = 0$. En composant alors de même par $P_{n-2} \circ \cdots \circ P_1$, on obtient $\lambda_{n-1} = 0$ et on itère le processus pour obtenir la nullité de tous les λ_i (on pourrait procéder par récurrence décroissante pour montrer la nullité de tous λ_i ou encore raisonner par l'absurde). Ainsi

$$\boxed{(f_1, \ldots, f_n) \text{ est libre}}$$

C. Expression de la matrice $J(p)$

10. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à S^T. En notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ f(e_i) = e_{i+1} \quad \text{et} \quad f(e_n) = 0$$

On montre par récurrence finie que

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ f^i(e_1) = e_{i+1}$$

- C'est vrai au rang 0 ($f^0 = \mathrm{Id}$).
- Supposons le résultat vrai à un rang $i \in [\![0, n-2]\!]$. On a alors $f^{i+1}(e_1) = f(e_{i+1}) = e_{i+2}$ ce qui montre le résultat au rang $i+1$.

La famille $(e_1, f(e_1), \ldots, f^{n-1}(e_1))$ est donc une base (c'est même la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Comme U est la matrice qui représente e_1, on en déduit que

$$\boxed{\left(\left(S^\top\right)^i U\right)_{0 \leq i \leq n-1} \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})}$$

11. Pour $j \in [\![1, n]\!]$

$$C_j f_j(S) = a_n \prod_{k=j}^{n} (I_n - \alpha_k S) \prod_{k=1}^{j-1} (S - \alpha_k I_n)$$

$$B_j f_j(S) = a_n \prod_{k=j+1}^{n} (I_n - \alpha_k S) \prod_{k=1}^{j} (S - \alpha_k I_n)$$

Ainsi, $B_j f_j(S) = C_{j+1} f_{j+1}(S)$ pour $j \in [\![1, n-1]\!]$ et on a un télecopage :

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\top \left(C_j^\top C_j - B_j^\top B_j\right) f_j(S) = f_1(S)^\top C_1^\top C_1 f_1(S) - f_n(S)^\top B_n^\top B_n f_n(S)$$

Comme $C_1 f_1(S) = p_0(S)$ et $B_n f_n(S) = p(S)$, on a montré que

$$\boxed{J(p) = \sum_{j=1}^{n} f_j(S)^\top \left(C_j^\top C_j - B_j^\top B_j\right) f_j(S)}$$

12. On remplace C_j et B_j par leurs expressions et les termes se simplifient :

$$C_j^\top C_j - B_j^\top B_j = (1 - \alpha_j^2)(I_n - S^T S)$$

Un calcul élémentaire donne $U^T U = E_{1,1}$. De plus

$$(S^T S)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k+1,i} \delta_{k+1,j}$$

Si $i \neq j$, tous les termes de la somme sont nuls. Si $i = j \neq 1$, le seul terme de la somme pouvant être non nul est celui tel que $k+1 = i$. Un tel $k \in [\![1, n]\!]$ existe sauf si $i = 1$. Ainsi $S^T S = I_n - E_{1,1}$. On en déduit que

$$\boxed{C_j^\top C_j - B_j^\top B_j = \left(1 - \alpha_j^2\right) U U^\top}$$

13. Avec les deux questions précédentes,

$$J(p) = \sum_{j=1}^{n} (1-\alpha_j^2) V_j V_j^T$$

Multiplier à droite par une matrice diagonale revient à multiplier chaque colonne par le coefficient diagonal correspondant. Ainsi

$$VDV^T = \begin{pmatrix} (1-\alpha_1^2)V_1 & \dots & (1-\alpha_n^2)V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ \vdots \\ V_n^T \end{pmatrix}$$

Un calcul par bloc montre que ceci vaut $\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha_i^2)V_iV_i^T$ et donc

$$\boxed{J(p) = VDV^T}$$

14. Supposons que p possède une racine stable.
Si $\alpha \notin \{1,-1\}$, α et $\frac{1}{\alpha}$ sont deux racines distinctes de p et la question 6 donne $(f_1,\dots,f_n)$ liée et il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq 0$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$.
On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(S^T) = 0$ et donc que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i = 0$.
On trouve que les colonnes de V sont liées et V n'est donc pas inversible. Il en est de même de $J(p)$ (par exemple en passant au déterminant).
Si $\alpha \in \{-1,1\}$ alors D n'est pas inversible et on a encore la non inversibilité de $J(p)$.

$$\boxed{\text{si } p \text{ possède une racine stable alors } J(p) \text{ n'est pas inversible}}$$

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

15. Il existe un sous-espace F telle que $\dim(F) = d(A)$ et $\forall X \in F \setminus \{0\},\ X^TAX > 0$ (car $d(A)$ est un maximum).
L'image F' de F par P (confondu canoniquement à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$) est de dimension $d(A)$ (car P représente un isomorphisme).
Si $Y \in F'$ est non nul, $Y^TBY = X^TAX$ avec $X = P^{-1}Y$. $X \neq 0$ et $X \in F$ ($P^{-1}(F') = F$) et donc $Y^TBY > 0$.
On a trouvé un sous-espace de dimension $d(A)$ vérifiant $(\mathcal{C}_B)$ et donc $d(B) \geq d(A)$.
Comme $B = Q^TAQ$ avec $Q = P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$, on a de même l'autre inégalité.

$$\boxed{\text{S'il existe } P \text{ inversible telle que } A = P^TBP, \text{ alors } d(A) = d(B)}$$

16. Par théorème spectral (et puisque l'on suppose M symétrique réelle), les sous-espaces propres de M sont supplémentaires orthogonaux. Posons

$$F_M = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)\cap\mathbb{R}^{+*}} E_\lambda(M)$$

Comme la dimension de $E_\lambda(M)$ est égal à la multiplicité de λ (diagonalisabilité), F_M est de dimension $\pi(M)$.
Soit $X \in F_M$ non nul. On le décompose en $X = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)\cap\mathbb{R}^{+*}} X_\lambda$ et on a (les X_λ étant orthogonaux)

$$X^TMX = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)\cap\mathbb{R}^{+*}} \lambda \|X_\lambda\|^2$$

où $\|.\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. Comme l'un des X_λ est non nul et que les λ sont > 0, la somme est > 0. F_M vérifie donc la condition $(\mathcal{C}_M)$ et donc

$$\boxed{d(M) \geq \dim(F_M) = \pi(M)}$$

17. Par le théorème spectral et le choix de F_M, on a

$$F_M^{\perp} = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \cap \mathbb{R}^-} E_\lambda(M)$$

et comme pour F_M, on a
$$\forall X \in F_M^{\perp},\ X^T M X \leq 0$$
Supposons, par l'absurde, qu'il existe G vérifiant $(\mathcal{C}_M)$ et tel que $\dim(G) > \pi(M)$. Si, par l'absurde, il existe $X \in G \cap F_M^{\perp}$ non nul on a simultanément $X^T M X \leq 0$ (appartenance à $F_M^{\perp}$) et $X^T M X > 0$ (appartenance à G) ce qui donne une contradiction. Ainsi, G et $F_M^{\perp}$ sont en somme directe et

$$n \geq \dim(G \oplus F_M^{\perp}) = \dim(G) + \dim(F_M^{\perp}) > \pi(M) + (n - \pi(M)) = n$$

On a une contradiction ! On en déduit que $d(M) \leq \pi(M)$ et ainsi

$$\boxed{d(M) = \pi(M)}$$

18. La contraposée de la question 14 montre que si $J(p)$ est inversible, alors P ne possède aucune racine réelle stable.
Dans ce cas, $J(p) = VDV^T$ avec V inversible et la question 15 donne $d(J(p)) = d(D)$.
$J(p)$ et D étant symétriques, la question 17 donne alors $\pi(J(p)) = \pi(D)$ et la définition de D indique que $\pi(D) = \sigma(p)$. Ainsi $\pi(J(p)) = \sigma(p)$.

$$\boxed{\text{Si } J(p) \text{ est inversible alors } p \text{ ne possède aucune racine stable et } \sigma(p) = \pi(J(p))}$$

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19. On suppose que p n'a pas de racine stable et ainsi $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre (question 9) et D est inversible (car $\forall i,\ \alpha_i^2 \neq 1$ puisque si ± 1 était racine, elle serait stable).
$J(p)$ étant de plus supposée non inversible, VDV^T est non inversible et donc V ne l'est pas.
Il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i V_i = 0$:

$$q(S^T)U = 0 \quad \text{avec} \quad q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

q est de degré $\leq n-1$ comme combinaison d'éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et non nul par indépendance des f_i.

$$\boxed{\text{Si } p \text{ n'a pas de racine stable et } J(p) \text{ non inversible, } \exists q \in\ \mathbb{R}_{n-1}[X] \setminus \{0\} \text{ tel que } q(S^T)U = 0}$$

20. La question 14 indique que si $J(p)$ est inversible, alors p n'a pas de racine stable.

Réciproquement on suppose que p n'a pas de racine stable et, par l'absurde, que $J(p)$ est non inversible.
La question précédente fournit q tel que $q(S^T)U = 0$. Ceci donne une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de $\left(\left(S^\top\right)^i U\right)_{0 \leq i \leq n-1}$ ce qui contredit l'indépendance prouvée en question 10.

$$\boxed{J(p) \text{ est inversible si et seulement si } p \text{ n'admet aucune racine stable}}$$

F. Un cas particulier

21. Les racines de h sont 0 et les racines de p' et p' n'a pas de racine stable par la question 5.
h n'a donc pas de racine stable et avec la question 20,

$$\boxed{J(h) \text{ est inversible}}$$

22. Soit $r \in]0,1[$. On a (question 1)

$$p(rX) = a_n \prod_{i=1}^{n}(rX - \alpha_i) = a_n r^n \prod_{i=1}^{n}\left(X - \frac{\alpha_i}{r}\right)$$

$p(rX)$ est donc scindé (et même à racines simples puisque les α_i/r sont, comme les α_i, deux à deux distincts).

Les α_i sont ordonnés et il existe k tel que les racines de p dans $]-1,1[$ soient $\alpha_k < \cdots < \alpha_{k+\sigma(p)-1}$.
Si $i \notin \{k,\ldots,k+\sigma(p)-1\}$, on a $\frac{|\alpha_i|}{r} > |\alpha_i| \geq 1$.
Soit $i \in \{k,\ldots,k+\sigma(p)-1\}$. Pour que $-1 < \frac{\alpha_i}{r} < 1$, il suffit que $-1 < \frac{\alpha_k}{r}$ et $\frac{\alpha_{k+\sigma(p)-1}}{r} < 1$. Il suffit donc que $r > -\alpha_k$ et $r > \alpha_{k+\sigma(p)-1}$.
En posant $\eta_1 = \min(1, 1+\alpha_k, 1-\alpha_{k+\sigma(p)-1})$ on a $\eta_1 > 0$ et la condition précédente vraie pour tout $r \in]1-\eta_1, 1[$ et $p(rX)$ admet exactement $\sigma(p)$ racines entre -1 et 1.

Si β est une racine stable de $p(rX)$, $\beta \neq 0$ et il existe i et j tels que $\beta = \frac{r}{\alpha_i}$ et $\frac{1}{\beta} = \frac{r}{\alpha_j}$. On a alors $\frac{r^2}{\alpha_i\alpha_j} = 1$ et donc $r^2 = \alpha_i\alpha_j$. Comme $\forall i,j,\ \alpha_i\alpha_j \neq 1$ et qu'il n'y a qu'un nombre fini de telles quantités, il existe un voisinage de 1 ne contient aucun élément du type $\alpha_i\alpha_j$. Il existe donc η_2 tel que si $r \in]1-\eta_2, 1[$, $r^2 = \alpha_i\alpha_j$ n'a jamais lieu. Pour de tels r, $p(rX)$ n'a pas de racine stable.

En choisissant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$, on a

$$\boxed{\text{pour } r \in]1-\eta, 1[,\ p(rX) \text{ est scindé sans racine stable et } \sigma(p(rX)) = \sigma(P)}$$

23. On chosit η comme ci-dessus et on prend $r \in]0, \eta[$..
Comme $p(rX)$ na pas de racines stables, $J(p(rX))$ est inversible (question 20) et $\sigma(p(rX)) = \pi(J(p(rX))) = \pi(F(r))$.
Avec la question 13, on trouve V telle que

$$J(p(rX)) = V \mathrm{diag}\left(1 - \frac{\alpha_j^2}{r^2}\right) V^T = V D_r V^T$$

On a $\pi(J(p(rX))) = d(J(P(rX)))$ et comme V est inversible ($J(p(rX))$ l'est), la question 15 donne $d(J(p(rX))) = d(D_r) = \pi(D_r)$.
Par choix de r, D_r possède exactement $\sigma(p)$ valeurs propres dans $]-1,1[$ et ona donc

$$\forall r \in]0, \eta[,\ \pi(F(r)) = \sigma(p)$$

Pour un tel r, $\frac{n}{2(r-1)} < 0$ et les valeurs propres > 0 de $\frac{n}{2(r-1)}F(r)$ correspondent à celles < 0 de $F(r)$. Et comme 0 n'est pas racine de $F(r)$ ($J(p(rX))$ inversible), ce nombre vaut $n - \pi(F(r))$. On a donc

$$\forall r \in]1-\eta, 1[,\ \pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = n - \sigma(p)$$

et a fortiori,

$$\boxed{\lim_{r\to 1^-} \pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) = n - \sigma(p)}$$

24. Soit $r > 0$. Posons $q = p(rX)$ en sorte que $F(r) = J(q) = q_0(S)^T q_0(S) - q(s)^T q(S)$. Notons que

$$\forall x \neq 0,\ q_0(x) = x^n q\left(\frac{1}{x}\right) = x^n p\left(\frac{r}{x}\right) = r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n p\left(\frac{r}{x}\right) = r^n p_0\left(\frac{x}{r}\right) = \lambda r^n p\left(\frac{x}{r}\right)$$

Ainsi,

$$F(r) = r^{2n} p\left(\frac{S}{r}\right)^T p\left(\frac{S}{r}\right) - p(rS)^T p(rS)$$

Par les théorèmes d'opération, $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^{+*}}$ (chaque coefficient est une fraction rationnelle en r).
On a

$$p(\frac{S}{r}) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{S^k}{r^k}$$

et en dérivant par rapport à r, avec ici un abus de notation,

$$\frac{d\left(p(\frac{S}{r})\right)}{dr} = -\sum_{k=0}^n k a_k \frac{S^k}{r^{k+1}} = -\frac{1}{r}\sum_{k=0}^n k a_k \frac{S^k}{r^k} = -\frac{1}{r}(Xp')\left(\frac{S}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} S p'\left(\frac{S}{r}\right)$$

et de même

$$\frac{d\left(p(rS)\right)}{dr} = \sum_{k=0}^n k a_k r^{k-1} S^k = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^n k a_k r^k S^k = \frac{1}{r}(Xp')\,(rS) = Sp'(rS)$$

On peut alors dériver F avec la formule $(ABC)' = A'BC + AB'C + ABC'$ et comte-tenu du fait que la transposée de la dérivée est la dérivée de la transposée (par linéarité du passage à la transposée) :

$$\begin{aligned} F'(r) &= 2nr^{2n-1} p\left(\frac{S}{r}\right)^T p\left(\frac{S}{r}\right) - r^{2n}\left(\frac{1}{r^2} S p'\left(\frac{S}{r}\right)\right)^T p\left(\frac{S}{r}\right) - r^{2n} p\left(\frac{S}{r}\right)^T \frac{1}{r^2} S p'\left(\frac{S}{r}\right) \\ &\quad -(Sp'(rS))^T p(rS) - p(rS)^T S p'(rS) \end{aligned}$$

Ainsi

$$F'(1) = 2np(S)^T p(S) - 2(Sp'(S))^T p(S) - 2p(S)^T S p'(S)$$

Comme S et $p'(S)$ commutent ainsi que S^T et $p'(S)^T = p'(S^T)$ on peut écrire cela

$$\boxed{F'(1) = 2n(p(S))^\top p(S) - 2S^\top \left(p'(S)\right)^\top p(S) - 2(p(S))^\top p'(S) S}$$

25. La formule de Taylor-Young (le fait que la fonction est à valeurs vectorielle ne gêne pas) donne

$$F(r) \underset{r\to 1}{=} F(1) + (r-1)F'(1) + o(r-1)$$

On a $F(1) = J(p) = p_0(S)^T p_0(S) - p(S)^T p(S) = 0$ car $p = \lambda p_0$ avec $\lambda^2 = 1$. On a donc

$$\frac{F(r)}{r-1} \underset{r\to 1}{=} F'(1) + o(1)$$

Par ailleurs, avec les formules de la question 4,

$$\begin{aligned} J(h) &= h_0(S)^T h_0(S) - h(S)^T h(S) \\ &= (np(S) - Sp'(S))^T (np(S) - Sp'(S)) - (Sp'(s))^T (Sp'(S)) \\ &= n^2 p(S)^T p(S) - np(S)^T S p'(S) - (Sp'(S))^T S p'(S) \end{aligned}$$

et compte-tenu des commutation notées plus haut, ceci vaut $\frac{n}{2}F'(1)$. Ainsi

$$\boxed{\frac{n}{2(r-1)}F(r) \underset{r\to 1}{=} J(h) + o(1)}$$

26. Avec la continuité admise, on a $\pi\left(\frac{n}{2(r-1)}F(r)\right) \to \pi(J(h))$ et avec la question précédente et la question 23, on a donc
$$n - \sigma(p) = \pi(J(h))$$
Mais, $h = Xp'$ et p' n'a pas de racine stable et donc $\sigma(h) = 1+\sigma(p') = 1+\pi(J(p'))$ et finalement
$$\boxed{\sigma(p) = n - 1 - \pi\left(J\left(p'\right)\right)}$$

G. Méthode générale.

27. Les racines stables de p sont aussi racines de p_0 avec la même multiplicité (car si $x \neq 0$ est racine de p, $1/x$ est racine de p_0 avec même multiplicité). Ainsi $g = \frac{P}{f}$ est sans racine simple (en divisant par le pgcd, on supprime toutes les racines stables). Par la question 18,
$$\boxed{\sigma(g) = \pi(J(g))}$$

28. Comme expliqué ci-dessus, f est le produit des $(X-\alpha)$ pour α racine stable de p. On peut donc regrouper les facteurs de f par paires $(X-\alpha)(X-1/\alpha)$ sauf peut être $(X-1)$ et $(X+1)$ qui se retrouvent seuls (éventuellement plusieurs fois). On écrit ainsi $f = g_1 \dots g_\ell$ avec des g_i dont les racines sont stables et de multiplicité 1. On a alors
$$\sigma(p) = \sigma(g) + \sum_{i=1}^{\ell} \sigma(g_i)$$
$\sigma(g)$ est donné par la question 27. $\sigma(g_i)$ est donné par la question 26. On obtient
$$\sigma(p) = \pi(J(g)) + \sum_{i=1}^{\ell}(\deg(g_i) - 1 - \pi(J(g_i')))$$
La somme des degrés des g_i vaut le degré de f c'est à dire $n - \deg(g)$. Ainsi
$$\boxed{\sigma(p) = \pi(J(g)) - \ell + n - \deg(g) + \sum_{i=1}^{\ell} \pi(J(g_i'))}$$