DM9 (Intégration)
Pour le lundi 26 janvier

Problème 1 (CCINP)

Ce problème est constitué de trois parties indépendantes.
Dans la Partie I, on calcule la valeur de l'intégrale de Dirichlet en étudiant une intégrale à paramètre.
Dans la Partie II, on calcule la valeur d'une intégrale en utilisant un théorème d'interversion intégrale et somme infinie.
Dans la Partie III, on propose des applications du théorème de convergence de dominée.

Partie I

Q1. Justifier l'existence de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t$.

Q2. Pour $A > 0$, justifier l'existence de l'intégrale $D(A) = \displaystyle\int_0^{A} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Q3. Grâce à une intégration par parties, prouver que $D(A)$ a une limite (réelle) quand A tend vers $+\infty$, égale à K. C'est-à-dire que :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} D(A).$$

Q4. Justifier que l'application $L : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-tx}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Q5. Montrer que l'application L est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Q6. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} L'(x) = \lim_{x\to+\infty} L(x) = 0.$$

Q7. Pour tout réel $x > 0$, montrer que :

$$L''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

On pourra remarquer que $\cos(t) = \mathcal{R}e(e^{it})$.

Q8. En déduire que pour tout réel $x > 0$:

$$L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Conclure que $K = \dfrac{\pi}{2}$.

Partie II

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Q9. Justifier que la fonction $u \mapsto \frac{\ln(u)}{u-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Q10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer $\int_0^1 u^k \ln(u)\mathrm{d}u$.

Q11. Grâce au développement en série entière de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ sur $]0,1[$, et en précisant le théorème utilisé, justifier que : $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$.

En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\mathrm{d}u$.

Partie III

Q12. Rappeler avec précision le théorème de convergence dominée.

Q13. On considère ici une application continue $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Q14. On suppose ici de plus que $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} nI_n$. *On pourra transformer nI_n grâce à un changement de variable.*

Q15. Application

Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\int_0^1 \sin(t^n)\mathrm{d}t$ (grâce à une intégrale).

Problème 2 (Mines)

Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Notations et résultats admis

— Soit la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

— Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, on pose $C^k(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

— On note $CL(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à croissance lente, c'est-à-dire :

$$CL(\mathbf{R}) = \left\{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \exists C > 0,\ \exists k \in \mathbf{N} \text{ tel que pour tout } x \in \mathbf{R},\ |f(x)| \leq C\left(1 + |x|^k\right)\right\}.$$

— On note $L^1(\varphi) = \{f \in C^0(\mathbf{R}),\ f\varphi \text{ intégrable sur } \mathbf{R}\}$.

— Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on définit si cela est possible la fonction $P_t(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

— Pour f deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, on définit sur $\mathbf{R}$ la fonction $L(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad L(f)(x) = f''(x) - xf'(x).$$

— Une fonction $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite fonction polynomiale en $|x|$ s'il existe $d \in \mathbf{N}$ et des réels $a_0, \ldots, a_d$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k$.

— Soient $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. On admet que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ si, et seulement si, pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(t_n) = \ell$.

Partie 1 : Résultats préliminaires

1 ▷ Montrer que toute fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ est à croissance lente.

2 ▷ Montrer que $C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R}) \subset L^1(\varphi)$.

On admet dans toute la suite du problème que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

3 ▷ Montrer que $CL(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel. Montrer aussi que $CL(\mathbf{R})$ est stable par produit.

4 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Vérifier que la fonction $P_t(f)$ est bien définie pour $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ et vérifier que P_t est linéaire sur $C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$.

5 ▷ Montrer que pour tout $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{t \to +\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

6 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que si $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$, alors $P_t(f) \in C^0(\mathbf{R})$. Montrer aussi que $P_t(f)$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ indépendante de t. En déduire que $P_t(f) \in L^1(\varphi)$.

On admettra dans toute la suite du problème que, si $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$, alors

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

7 ▷ Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ telles que les fonctions f, f', f'' et g soient à croissance lente, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)\,g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,g'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie 2 : Dérivée de $P_t(f)$

Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$, on note, si cela a un sens, $\dfrac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}$ la dérivée de la fonction $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$.

Pour $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+$ fixé, on note, si cela a un sens, $P_t(f)'$ (resp. $P_t(f)''$) la dérivée de $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$ (resp. la dérivée seconde de $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$).

8 ▷ Montrer que si $f \in C^1(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que $f' \in CL(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}$, alors $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}}y\right) f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

9 ▷ Soient $f \in C^2(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente et $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Montrer aussi que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)'(x) = \mathrm{e}^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)''(x) = \mathrm{e}^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}y\right) \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

10 ▷ En déduire que pour $f \in C^2(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = L(P_t(f))(x).$$

Partie 3 : Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Pour $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

on définit l'entropie de f par rapport à φ par :

$$\mathrm{Ent}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x))\, f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans la suite de cette partie, f est un élément de $C^2(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives tel que les fonctions f, f', f'' et $\dfrac{f'^2}{f}$ soient à croissance lente. On suppose aussi que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

11 ▷ Étudier les variations de la fonction $t \mapsto t\ln(t)$ sur $\mathbf{R}_+^*$. On vérifiera que l'on peut prolonger par continuité la fonction en 0.

12 ▷ Justifier que la quantité $\mathrm{Ent}_\varphi(g)$ est bien définie pour tout $g \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Indication : On pourra utiliser la question 11.

13 ▷ Pour $t \in \mathbf{R}_+$, on pose $S(t) = \mathrm{Ent}_\varphi(P_t(f))$. Justifier que $S(t)$ est bien définie.

14 ▷ Montrer que S est continue sur $\mathbf{R}_+$.

Indication : On pourra au préalable montrer que, si $x \in \mathbf{R}$, $t \mapsto P_t(f)(x)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.

15 ▷ Vérifier que l'on a $S(0) = \mathrm{Ent}_\varphi(f)$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0$.

16 ▷ On **admet** que S est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} \left(1 + \ln(P_t(f)(x))\right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(P_t(f))(x) \left(1 + \ln(P_t(f)(x))\right) \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

17 ▷ En admettant que le résultat de la question 7 est valable pour les fonctions $P_t(f)$ et $1 + \ln(P_t(f))$, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) = \mathrm{e}^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

18 ▷ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq \mathrm{e}^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

19 ▷ En déduire que l'on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq \mathrm{e}^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

20 ▷ Établir l'inégalité suivante

$$\mathrm{Ent}_\varphi(f) \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Fin du problème