ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

Cours

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Matrices orthogonales et isométries vectorielles

A. Matrices orthogonales

1. Définitions

Définition 1

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M est une *matrice orthogonale* lorsque M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.

En d'autres termes :

$$M \text{ est orthogonale} \iff MM^\top = I_n \iff M^\top M = I_n.$$

Exemple 1 : Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$) et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Définition/Proposition 2

On appelle *groupe orthogonal d'ordre n* et on note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

C'est un sous-ensemble de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient I_n, qui est stable par produit :

- si M et N sont des matrices orthogonales alors MN est une matrice orthogonale,

et par passage à l'inverse :

- si M est une matrice orthogonale alors M^{-1} est une matrice orthogonale.

2. Lien avec les bases orthonormées

Proposition 3

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \text{ est orthogonale} &\iff \text{les colonnes de } M \text{ forment une famille orthonormée de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ &\iff \text{les lignes de } M \text{ forment une famille orthonormée de } \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

où $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ sont munis de leur produit scalaire canonique.

Proposition 4

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$$\mathscr{B}' \text{ est une base orthonormée de } E \Leftrightarrow \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \text{ est orthogonale}$$

où $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ désigne la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Formules de changement de bases orthonormées :
Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormées de E alors la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est orthogonale (puisque par définition $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$).
Si on note $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ alors $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = P^{-1} = P^{\mathsf{T}}$.

Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on a alors :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(u) = P \cdot \mathscr{M}at_{\mathscr{B}'}(u) \cdot P^{\mathsf{T}}.$$

3. Déterminant d'une matrice orthogonale

Proposition 5

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1 ou -1.

Définition/Proposition 6

On appelle *groupe spécial orthogonal d'ordre* n et on note $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1.

C'est un sous-ensemble de $O_n(\mathbb{R})$ qui contient I_n, qui est stable par produit et par passage à l'inverse.

Définition 7

- Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E. On a $\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) \in \{-1, 1\}$.
  On dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ *ont la même orientation* lorsque $\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) = 1$ et que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ *sont d'orientation contraire* lorsque $\det(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) = -1$.
- *Orienter un espace euclidien*, c'est choisir l'une de ses bases orthonormées comme base de référence. Les bases orthonormées de même orientation que celle-ci sont dites *orthonormées directes*, et celles d'orientation contraire sont dites *orthonormées indirectes* ou *rétrogrades*.

B. Isométries vectorielles

1. Définitions et exemples

Définition 8

On appelle *isométrie vectorielle* tout endomorphisme u de E qui conserve la norme c'est-à-dire qui vérifie :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|.$$

Une isométrie vectorielle est un automorphisme (puisque c'est clairement un endomorphisme injectif de E avec E de dimension finie) : on parle aussi d'*automorphisme orthogonal*.

Rappel : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
On appelle *symétrie par rapport à F parallèlement à G* l'application $s : E \to E$ définie par :

$$\begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \to & E \\ z = x + y & \mapsto & x - y \end{array} \quad \text{où } (x, y) \text{ est l'unique couple de } F \times G \text{ tel que } z = x + y.$$

Définition 9

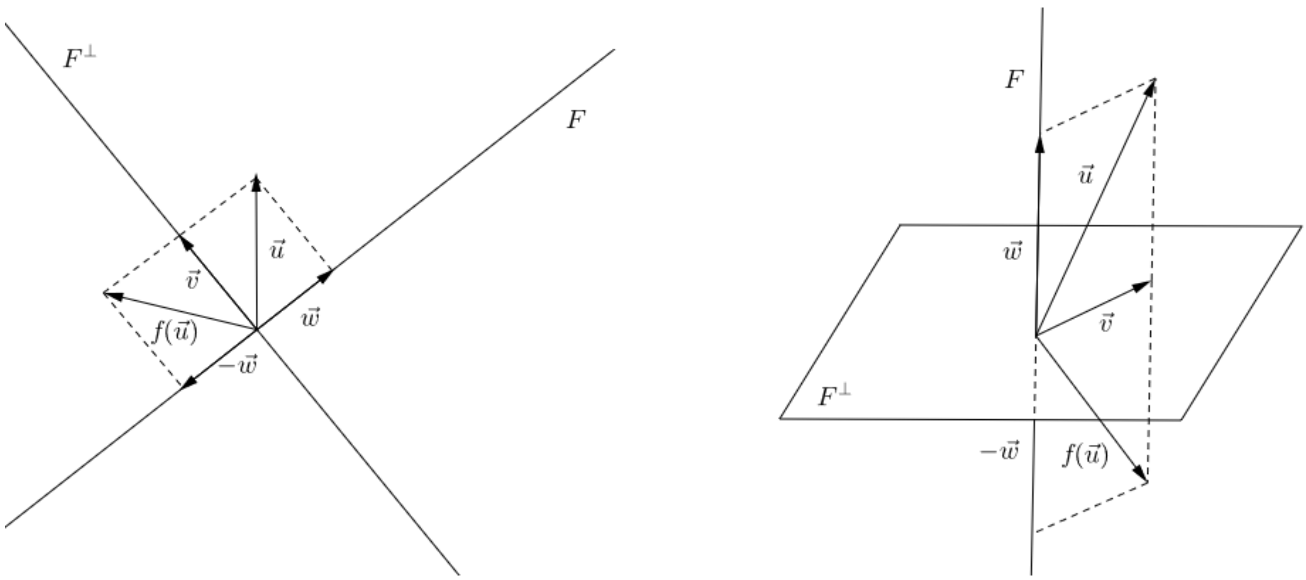
Soit $s : E \to E$.
On dit que s est une *symétrie orthogonale* lorsque s est une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F de E parallèlement à $F^\perp$.

Définition 10

Soit D une droite vectorielle c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.
On appelle *réflexion d'axe D* la symétrie par rapport à $D^\perp$ parallèlement à D.

On notera qu'une réflexion est en particulier une symétrie orthogonale puisque $D = (D^\perp)^\perp$.

Illustration graphique dans le plan et l'espace d'une réflexion f d'axe F :



Exemple 2 :

1. Montrer qu'une symétrie orthogonale est une isométrie.
2. Une projection orthogonale est-elle une isométrie ?

Définition/Proposition 11

On appelle *groupe orthogonal* de E et on note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

C'est un sous-ensemble de $GL(E)$ qui contient Id_E, qui est stable par composition :

- si u et v sont des isométries vectorielles alors $u \circ v$ est une isométrie vectorielle,

et par passage à l'endomorphisme réciproque :

- si u est une isométrie vectorielle alors u^{-1} est une isométrie vectorielle.

2. Caractérisations

Proposition 12

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
u est une isométrie vectorielle si et seulement si u conserve le produit scalaire c'est-à-dire vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Corollaire 13

Soit $u \in O(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.

Proposition 14

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
u est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image de $\mathscr{B}$ par u est une base orthonormée de E.

3. Lien avec les matrices orthogonales

Proposition 15

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base **orthonormée** de E.
u est une isométrie vectorielle si et seulement si $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En appliquant le résultat précédent avec la base canonique, on obtient :

$$\begin{aligned} M \text{ est orthogonale } &\Leftrightarrow X \mapsto MX \text{ est une isométrie vectorielle de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \text{l'endomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ canoniquement associé à } M \\ & \text{ est une isométrie vectorielle} \end{aligned}$$

Corollaire 16

Le déterminant d'une isométrie vectorielle est égal à 1 ou -1.

Exemple 3 : Donner le déterminant d'une réflexion d'axe D.

C. Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Théorème 17 (*Détermination de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$*)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

On a :

$$O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta, \theta \in \mathbb{R}\} \quad \text{et } SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 18

- Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} R_\theta$.
- Les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent.
- Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $S_\theta S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$.

Notons quelques conséquences de ces résultats :

- pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta R_{-\theta} = I_2$ donc $R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = R_\theta^\top$,
- pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $S_\theta^2 = I_2$ donc $S_\theta^{-1} = S_\theta = S_\theta^\top$.

Théorème 19 (*Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien*)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.

- Soit $u \in O(E)$ tel que $\det(u) = 1$.
  Alors il existe un réel θ, unique à un multiple entier de 2π près, tel que pour toute base $\mathscr{B}$ orthonormale directe, on a $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(u) = R_\theta$.
  On dit que u est la *rotation d'angle θ*.
- Soit $u \in O(E)$ tel que $\det(u) = -1$.
  Alors u est la réflexion d'axe $D = \operatorname{Ker}(u + \operatorname{Id}_E)$.

Soit r_θ la rotation d'angle θ. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E.
Si x a pour coordonnées (a,b) dans la base $\mathscr{B}$ alors $r_\theta(x)$ a pour coordonnées (a',b') dans la base $\mathscr{B}$ où :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Définition/Proposition 20

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.
Soit x et y deux vecteurs non nuls de E.
Il existe un réel θ, unique à un multiple entier de 2π près, tel que $r_\theta\left(\dfrac{x}{||x||}\right) = \dfrac{y}{||y||}$
(où r_θ désigne la rotation d'angle θ).
Ce réel θ (défini à un multiple entier de 2π près) est appelé *mesure de l'angle orienté* (x,y).

II. Matrices symétriques réelles et endomorphismes autoadjoints

A. Définitions et premières propriétés

1. Matrices symétriques réelles

Définition 21

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M est une *matrice symétrique* lorsque $M^\top = M$.

Ainsi :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{ est symétrique } \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = m_{j,i}.$$

Exemple : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice $A^\top A$ est une matrice symétrique.

Définition/Proposition 22

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles.
$\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Endomorphismes autoadjoints

Définition 23

On appelle *endomorphisme autoajoint* tout endomorphisme u de E qui vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

On parle aussi d'*endomorphisme symétrique*.

Exemple 4 :

1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Montrer que l'homothétie de rapport k est un endomorphisme autoadjoint.
2. Montrer qu'une symétrie orthogonale est un endomorphisme autoadjoint.

Proposition 24

Soit p un projecteur sur E.
p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint.

Définition/Proposition 25

On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.
$\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

3. Lien entre les matrices symétriques et les endomorphismes autoajoints

Proposition 26

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base **orthonormée** de E.
u est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En appliquant le résultat précédent avec la base canonique, on obtient :

$$\begin{aligned} M \text{ est symétrique } &\Leftrightarrow X \mapsto MX \text{ est un endomorphisme autoadjoint de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \text{l'endomorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ canoniquement associé à } M \\ &\ \text{est un endomorphisme autoadjoint} \end{aligned}$$

Conséquence : Notons u l'endomophisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.
u est un projecteur orthogonal si et seulement si $M^2 = M$ et $M^\top = M$.

B. Théorème spectral

Proposition 27

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. Soit $(\lambda, \mu) \in \left(\mathrm{Sp}(u)\right)^2$ avec $\lambda \neq \mu$.
Si $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$ alors $x \perp y$.

Théorème 28 (*Théorème spectral*)

Si u est un endomorphisme autoadjoint de E alors u est diagonalisable dans une base orthonormée ce qui signifie :

- il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale

  ou encore

- il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

- On rappelle que par définition, un endomorphisme u de E est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Pour un endomorphisme autoadjoint, une telle base existe et on peut de plus la choisir orthonormée.
- En pratique, pour diagonaliser un endomorphisme autoadjoint dans une base orthonormée, on détermine les valeurs propres de u et on cherche une base de chaque sous-espace propre que l'on orthonormalise grâce au procédé de Gram-Schmidt. En juxtaposant les bases orthonormées de chaque sous-espace propre, on obtient une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u (on obtient une base de E car E est égal à la somme directe des sous-espaces propres de u et elle est orthonormée par la *Proposition 27*).

Proposition 29

Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $(\lambda, \mu) \in \big(\mathrm{Sp}(M)\big)^2$ avec $\lambda \neq \mu$.
Si $X \in E_\lambda(M)$ et $Y \in E_\mu(M)$ alors $X \perp Y$.

Théorème 30 (*Théorème spectral*)

Si M est une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors M est *orthogonalement diagonalisable* ce qui signifie :

- il existe une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M,

  ou encore

- il existe une matrice orthogonale $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^\intercal$.

- On rappelle que par définition, une matrice M est diagonalisable lorsqu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$. Pour une matrice symétrique réelle, une telle décomposition existe dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on peut de plus choisir P orthogonale.
- Attention, ce résultat n'est pas valable pour des matrices symétriques à cœfficients complexes.
- En pratique, pour diagonaliser une matrice symétrique réelle dans une base orthonormée, on détermine les valeurs propres de M et on cherche une base de chaque sous-espace propre que l'on orthonormalise grâce au procédé de Gram-Schmidt. En juxtaposant les bases orthonormées de chaque sous-espace propre, on obtient une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M (on obtient une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est égal à la somme directe des sous-espaces propres de M et elle est orthonormée par la *Proposition 29*).

On note P la matrice obtenue en écrivant les vecteurs de $\mathscr{B}$ en colonne. C'est la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qui est orthonormée, à la base orthonormée $\mathscr{B}$ donc P est orthogonale c'est-à-dire $P^{-1} = P^{\top}$.
Par les relations de changement de base, en notant φ_M l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à M, on obtient :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(\varphi_M) = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\varphi_M)P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$$

c'est-à-dire $M = PDP^{\top}$ avec D diagonale.

Exemple 5 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Déterminer deux matrices P et D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ avec D diagonale tel que $A = PDP^{\top}$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
   Déterminer une matrice $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale telle que $S_\theta = R_{\theta/2}DR_{-\theta/2}$.

C. Positivité, définie positivité

1. Définitions

Définition 31

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.

- u est dit *positif* lorsque pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$.
- u est dit *défini positif* lorsque pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\langle u(x), x\rangle > 0$.

Définition 32

- On note $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs.
- On note $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs.

Définition 33

Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

- M est dite *positive* lorsque pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^{\top}MX \geqslant 0$.
- M est dite *définie positive* lorsque pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $X^{\top}MX > 0$.

Exemple 6 : La matrice symétrique $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? définie positive ?

Définition 34

- On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.
- On note $\mathscr{S}_n^{++}(E)$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

2. Liens endomorphismes/matrices

Proposition 35

- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow X \mapsto MX \in \mathscr{S}^+(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})).$$

$$M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow X \mapsto MX \in \mathscr{S}^{++}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})).$$

- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.

$$u \in \mathscr{S}^+(E) \Longleftrightarrow \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

$$u \in \mathscr{S}^{++}(E) \Longleftrightarrow \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

3. Caractérisations spectrales

Théorème 36

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$.

- u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset [0, +\infty[$.
- u est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset]0, +\infty[$.

Théorème 37

Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

- M est positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset [0, +\infty[$.
- M est définie positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset]0, +\infty[$.

Exemple 7 : La matrice symétrique $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? définie positive ?