

ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

Exercices

1 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O(n)$.

1. Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $|a_{i,j}| \leq 1$.
2. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \geq n$. On pourra calculer $\text{tr}(A^T A)$.
3. Montrer que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| \leq n$. On pourra calculer $\langle AU, U \rangle$ pour $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 On se place dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique.

1. Montrer que $x + y + z = 0$ définit un plan \mathcal{P} et déterminer une base orthonormée de \mathcal{P}^\perp .
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan \mathcal{P} puis celle de la réflexion d'axe \mathcal{P}^\perp .

3 Un endomorphisme f d'un espace euclidien E est une *similitude vectorielle* s'il existe une isométrie vectorielle u et un réel strictement positif α tels que $f = \alpha u$.

1. Montrer que, si f est une similitude vectorielle alors elle conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0.$$

2. On suppose que g est un endomorphisme non nul de E conservant l'orthogonalité.

- (a) Soit a et b deux vecteurs unitaires de E . Calculer $\langle a + b, a - b \rangle$.
- (b) Montrer que $\|g(a)\| = \|g(b)\|$. Peut-on avoir $\|g(a)\| = 0$?
- (c) En déduire qu'il existe une isométrie vectorielle v et un réel strictement positif α tel que $g = \alpha v$. Conclure.

4 Pour chaque matrice, reconnaître l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{R}^3 canoniquement associé : projecteur, projection orthogonale, symétrie, symétrie orthogonale, réflexion, rotation et préciser ses caractéristiques.

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}; B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}; C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; E = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5 Factorisation QR

1. Soit \mathcal{B} une base d'un espace euclidien E et soit \mathcal{C} l'orthonormalisée de Schmidt de \mathcal{B} .
Que peut-on dire de la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} ?
2. Montrer que, pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs telles que $A = QR$.
3. Démontrer que le couple (Q, R) est unique.

6 Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et $u \in E$, u non nul.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on considère l'endomorphisme f défini par :

$$f(x) = x - \lambda \langle x, u \rangle u.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de E .
2. Montrer que 1 est valeur propre de f puis donner les éléments propres de f .
3. Déterminer les scalaires λ pour lesquels f est une isométrie vectorielle.
Reconnaître f dans ce cas.

7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta)) d\theta.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
2. *Polynômes de Tchebychev*
 - (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_k de degré k tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta).$$

- (b) Montrer que la famille (T_0, T_1, \dots, T_n) est une famille orthogonale de E .
 - (c) Déterminer $\|T_k\|$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En déduire une base orthonormée de E .
3. Montrer que $\varphi : P \mapsto (1 - X^2)P'' - XP'$ est un endomorphisme autoadjoint de E .

8 Diagonaliser les matrices suivantes dans une base orthonormée.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

9 Montrer que toute matrice de $O_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Quelles sont les matrices de $O_2(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que si λ est une valeur propre réelle de M alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

10 Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimension n .
On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u , comptées avec leur multiplicité.
Démontrer que :

$$\forall x \in E, \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2$$

11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T M X \geq 0$.
- (ii) Il existe une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = A^2$.

12 Soit E un espace euclidien.
Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $\rho(f) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } f\}$.
On pose également $\|f\| = \sup\{\|f(x)\|, \|x\| \leq 1\}$.
Démontrer que si f est un endomorphisme autoadjoint alors $\|f\| = \rho(f)$.

13 Soit E un espace euclidien de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On note \mathcal{B} une base orthonormale de E .
On dit qu'un endomorphisme u de E est antisymétrique si, pour tout vecteur x de E , on a $\langle u(x), x \rangle = 0$.

1. Montrer qu'un endomorphisme u de E est antisymétrique de E si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

2. Soit u un endomorphisme de E . Montrer que u est antisymétrique si, et seulement si, la matrice M de u dans la base \mathcal{B} est antisymétrique.
3. On suppose désormais que u désigne un endomorphisme antisymétrique de E .
 - (a) Soit λ un réel. Montrer que si λ est valeur propre de u alors $\lambda = 0$.
 - (b) Montrer que $\text{Im} u$ et $\text{Ker} u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E .
En déduire que $\text{Ker} u = \text{Ker}(u^2)$.
 - (c) Montrer que u^2 est un endomorphisme autoadjoint de E et que les valeurs propres de u^2 sont négatives ou nulles.

14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la matrice AA^T est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs.
2. On suppose que A est nilpotente (c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$) et qu'elle vérifie $AA^T = A^T A$.
Montrer que $AA^T = 0_n$ puis que $A = 0_n$.

15 Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Soit u un endomorphisme symétrique de E de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x de E non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls (on pourra raisonner par récurrence).