MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2025/2026.

Corrigé du DL n° 3.

Exercice 1 Remarque générale : une suite convergente admet une seule valeur d'adhérence : c'est sa limite.

1. Faux. Par exemple, la suite $(1/n)_n$ n'a qu'une valeur d'adhérence, qui est 0 (limite de la suite), mais $u_n \neq 0$.
2. Faux. La suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = 1$ si $n \equiv 1 \mod 2$, et n sinon, n'est pas bornée, mais 1 est valeur d'adhérence.
3. Vrai. S'il existe une infinité d'indices n tel que $u_n \in [a, b]$, ce segment contient une sous-suite de $(u_n)_n$, qui est donc bornée, et qui admet une sous-suite convergente vers un certain réel ℓ (Bolzano-Weierstrass), et par passage à la limite dans l'inégalité, $\ell \in [a, b]$. Mais c'est suite est aussi une sous-suite de (u_n), donc $\ell \in A$: contradiction.
4. Faux. Prenez $]0, 1[$ pour la suite $(1/n)_n$, qui n'admet que 0 comme valeur d'adhérence.
5. Faux. La suite donnée en exemple dans 2 est un contre-exemple.
6. Faux. Prenez $u_n = n$ (mais si (u_n) est bornée, alors $A \neq \emptyset$ par Bolzano-Weierstrass).
7. Vrai. Une suite extraite d'une suite extraite de (u_n) est une suite extraite de (u_n), donc sa limite est une valeur d'adhérence de (u_n).
8. Faux. La suite de 2 est à nouveau un contre-exemple.
9. Faux. Reprenez la suite donnez en 2 : la sous-suite des indices pairs n'a pas de valeur d'adhérence.

1 Problème : la série des inverses des nombres premiers diverge

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{p_{n+1}} > 0$. La suite $(S_n)_n$ est croissante donc, si elle ne converge pas, elle diverge vers $+\infty$.
2. (a) Pour tout $k_0 \in \mathbb{N}^*$ et tout $n > k_0$, on a $S_n^{k_0} = S_n - S_{k_0}$. Ici, k_0 est fixé donc $(S_n^{k_0})_n$ converge (différence de deux suites convergentes) et
$$\lim_{n\to+\infty} S_n^{k_0} = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{k_0}) = \left(\lim_{n\to+\infty} S_n\right) - S_{k_0} = \ell - S_{k_0} < \ell.$$
   (b) Le résultat de la question précédente peut s'écrire $\boxed{\ell_{k_0} = \ell - S_{k_0}}$. Or, $S_{k_0} \underset{k_0\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $\boxed{\ell_{k_0} \underset{k_0\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.
   Il existe donc un rang K_0 à partir duquel $\ell_{k_0} \leqslant \frac{1}{2}$.
3. (a) Soit n un élément de B différent de 1.
$$n = \prod_{k=1}^{K_0} p_k^{\beta_k} \quad \text{avec} \quad \beta_k \in \mathbb{N}.$$
   Pour tout $1 \leqslant k \leqslant K_0$, notons α_k le reste de la division euclidienne de β_k par 2, c'est-à-dire $\beta_k = 2q_k + \alpha_k$ (avec $q_k \in \mathbb{N}$ et $\alpha_k \in \{0, 1\}$). On a alors
$$n = \left(\prod_{k=1}^{K_0} p_k^{q_k}\right)^2 \times \prod_{k=1}^{K_0} p_k^{\alpha_k}$$
   qui est de la forme voulue. L'inégalité $m \leqslant \sqrt{n} \leqslant \sqrt{N}$ est une conséquence immédiate de $q \geqslant 1$ et $n \leqslant N$.

(b) Il y a au plus $\sqrt{N}$ manières de choisir l'entier m et 2^{K_0} manières de choisir l'entier q (2 choix pour chacun des α_k). Il y a donc au plus $\sqrt{N}2^{K_0}$ éléments dans $B \setminus \{1\}$. Il ne reste qu'à rajouter 1 pour avoir le résultat.

4. (a) Soit L le quotient de la division de N par p_k, donc $Lp_k \leqslant N < (L+1)p_k$. L'ensemble A_k est alors formé des entiers de la forme ap_k avec $1 \leqslant a \leqslant L$. Le cardinal de A_k est donc L, c'est-à-dire $E\left(\frac{N}{p_k}\right)$. On en déduit que $\text{card}(A_k) \leqslant \frac{N}{p_k}$.

   (b) Pour tout $n > K_0$, on a

$$\sum_{k=K_0+1}^{n} \text{card}(A_k) \leqslant \sum_{k=K_0+1}^{n} \frac{N}{p_k} \leqslant N\ell_{K_0} \leqslant \frac{N}{2},$$

   donc la suite $\left(\sum_{k=K_0+1}^{n} \text{card}(A_k)\right)_{n \geqslant K_0+1}$ est croissante et majorée. Elle converge donc vers une limite finie qui est inférieure à $\frac{N}{2}$. En remarquant que $A = \bigcup_{k>K_0} A_k$ et en utilisant le résultat admis par l'énoncé, on peut déduire :

$$\text{card}(A) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=K_0+1}^{n} \text{card}(A_k) \leqslant \frac{N}{2}.$$

   (c) Il suffit d'utiliser le résultat de la question précédente et l'égalité $\text{card}(A) = N - \text{card}(B)$ pour avoir la première inégalité. La seconde est le résultat de la question (3)(b).

5. Cette inégalité implique $\sqrt{N} \leqslant 2^{K_0+1} + \frac{2}{\sqrt{N}}$ pour tout $N \geqslant 1$. Or, le membre de gauche est le terme général d'une suite qui tend vers $+\infty$ donc il existe un entier $N \geqslant 1$ (assez grand) tel que $\sqrt{N} > 2^{K_0+1} + 2$, ce qui contredit l'inégalité. La suite (S_n) ne peut donc converger.

Pour prouver le résultat admis par l'énoncé, on peut supposer que la somme des cardinaux des A_k admet une limite finie (si elle est infinie, l'inégalité est évidente). On montre alors que cette somme ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls puis on utilise l'inégalité card$(B \cup C) \leqslant$ card(B) + card(C) généralisée à un nombre fini d'ensembles finis (par récurrence). A faire en exercice...