MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2025/2026.

DL n° 4.

Mardi 5 janvier.

À rendre le Mercredi 21 janvier.

Problème 1 : L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans ce problème, on fixe un entier $n \geqslant 2$, et on note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers de 0 à $n-1$: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Partie 1 : Structure d'anneau sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On munit l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de deux lois de compositions internes notées $\oplus$ et $\otimes$, définies ainsi : pour $a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a \oplus b$ (resp. $a \otimes b$) est le reste de la division euclidienne de la somme usuelle (resp produit usuel) par n.

Autrement dit, pour $a, b, c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a

$$a \oplus b = c \iff a + b \equiv c \mod n, \qquad a \otimes b = c \iff ab \equiv c \mod n.$$

Par exemple, si $n = 6$, on aura $3 \oplus 5 = 2$ et $3 \otimes 5 = 3$.

1. Vérifiez que ces deux lci sont associatives et commutatives, et que $\otimes$ est distributive sur $\oplus$.
2. Montrez que ces lois admettent chacune un élément neutre, et déterminez-les.
3. Soit $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrez que a admet un symétrique pour $\oplus$, et déterminez-le. On appellera l'opposé de a.
4. Montrez que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif.
5. Soit $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrez que a est inversible si et seulement si $a \wedge n = 1$.
6. Montrez que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ est un corps si et seulement si n est premier.
7. Montrez que si n n'est pas premier, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas intègre.

Partie 2 : carrés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans cette partie, on suppose que n est un nombre premier impair.

Soit $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On dit que a est un carré modulo n s'il existe $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $a \equiv x^2 \mod n$, ou encore tel que $a = x^2$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Montrez que si $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, alors $x^{n-1} = 1$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Montrez que le nombre de carrés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $\frac{n+1}{2}$.
3. Soit $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Montrez que a est un carré modulo n si et seulement si $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \mod n$, ou encore si et seulement si $a^{\frac{n-1}{2}} = 1$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (ou pourra admettre que l'équation $t^{\frac{n-1}{2}} = 1$ admet au plus $\frac{n-1}{2}$ solutions dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
4. Montrez que -1 est un carré modulo n si et seulement si $n \equiv 1 \mod 4$.

Problème 2 : billard rectangulaire

Dans ce problème, on souhaite démontrer qu'une tondeuse à gazon automatique mise en route dans un jardin rectangulaire va effectivement tondre tout le gazon.

Partie A : étude des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Pour un réel α, on note $\alpha\mathbb{Z}$ l'ensemble suivant : $\alpha\mathbb{Z} = \{n\alpha,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Dans cette partie, on fixe un sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ tel que $G \neq \{0\}$. Nous allons montrer que, soit G est dense dans $\mathbb{R}$, soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$.

Partie 1

1. Montrez que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$, que l'on notera a, et montrez que $a \geqslant 0$.
2. On suppose dans cette question que $a > 0$.
   (a) Montrez que $a \in G$.
   (b) Montrez que $G = a\mathbb{Z}$.
3. On suppose dans cette question que $a = 0$.
   (a) Soient $n, z \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y < nx < z$.
   (b) Montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Partie 2 : application à certains sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Soit $\omega \in \mathbb{R}$ et $G_\omega = \left\{a + b\omega,\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

1. Montrez que G_ω est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui contient $\mathbb{Z}$.
2. On suppose dans cette question que $\omega \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q > 0$ et p et q premiers entre eux, tels que $\omega = \dfrac{p}{q}$. Montrez que $G_\omega = \dfrac{1}{q}\mathbb{Z}$.
3. On suppose dans cette question que $\omega \neq \mathbb{Q}$. Montrez que G_ω est dense dans $\mathbb{R}$.

Partie 3 : Densité de la trajectoire d'une tondeuse à gazon

On considère un billard rectangulaire de longueur $\ell > 0$, de largeur $L > 0$, dans lequel on lance une boule qui, lorsque qu'elle atteint un bord du billard, repart dans la direction donnée par les règles de Descartes, *i.e.* symétriquement par rapport à la perpendiculaire au côté au point point considéré. On veut montrer que, sous certaines conditions, la trajectoire de la boule est dense dans le billard, *i.e.* que la boule passe "près" de tout point du billard.

La trajectoire de la boule peut être vue comme une droite D. En effet, quand la boule rencontre un bord du billard, il suffit de "déplier" le billard le long du bord en question (c'est une réflexion), et considérer que

la boule poursuit sa trajectoire dans le billard déplié. Les réflexions conservant les distances, étant donné un point X du billard, il s'agit de montrer que la droite donnnant la trajectoire passe "près" d'un point image de X par un certain nombre de ces réflexions.

On se place ici dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$. On note D la droite d'équation $y = px + m$ ($p, m \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$), représentant la trajectoire dans le billard déplié. Soit $X(x_0, y_0)$ un point du plan avec $(x_0, y_0) \in [0, \ell] \times [0, L]$. Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on considère le point $X_{ab}(2a\ell + x_0, 2bL + y_0)$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

1. Montrez que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, X_{ab} est l'image de X par une composée de réflexions précédentes.
2. Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, déterminez $\mathrm{d}(X_{ab}, D)$.
3. Soit $G = \{2bL + 2ap\ell,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montez que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, et exprimez G en fonction d'un sous-groupe G_ω, pour $\omega \in \mathbb{R}$ qu'on exprimera en fonction de L, ℓ et p.
4. En déduire une condition suffisante pour qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\mathrm{d}(X_{ab}, D) \leqslant \varepsilon$.