Corrigé du DS 5 sujet 1

Exercice 1 : CCINP 2020 maths 2 exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Q1. La matrice A est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

On observe que :

- $(1,1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 4 ;
- $A - I_3$ est de rang 1, donc 1 est une valeurs propres de A ; de plus le sous espace propre associé est engendré par $(1,-1,0)$ et $(1,0,-1)$.

On en déduit que

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \operatorname{diag}(4,1,1) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).}$$

Pour la suite, on calcule $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Q2. On pose $B = P\operatorname{diag}(2,1,1)P^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on a alors

$$B^2 = P\operatorname{diag}(2,1,1)^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour } B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B^2 = A.}$$

Q3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1} = P\operatorname{diag}(4^n,1,1)P^{-1}$, ce qui donne après calculs :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.}$$

Q4. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal π_A est simplement scindé et ses racines sont les valeurs propres de A, d'où

$$\boxed{\mu_A = (X-4)(X-1) = X^2 - 5X + 4.}$$

On effectue la division euclidienne de X^n par π_A :

$$X^n = \pi_A Q + aX + b \quad (*)$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
En évaluant (*) en 1 et 4, on obtient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b=4^n \end{cases}$ d'unique solution $(a,b) = \left(\dfrac{4^n-1}{3}, \dfrac{4-4^n}{3}\right)$.
Donc : $A^n = 0Q(A) + aA + bI_3$, d'où finalement :

$$\boxed{A^n = \frac{4^n-1}{3}A + \frac{4-4^n}{3}I_3.}$$

Remarque : ce résultat est bien cohérent avec celui de la question précédente.

Exercice 2 : extrait de CCINP 2014 maths 1

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \qquad \text{(décalage d'indice dans la dernière somme)} \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \qquad \text{(car } b_0 = B_0\text{)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.}$$

Q6. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on reconnait une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a_0 - 0$$

en particulier :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k \geqslant 0} (a_k - a_{k+1}) \text{ converge.}}$$

b) La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc : $(a_k - a_{k+1}) B_k \underset{k \to +\infty}{=} O(a_k - a_{k+1})$, et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $(a_n - a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, de plus la série $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$ converge absolument, donc converge (série complexe).
De plus $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $a_n B_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$; donc d'après la transformation d'Abel,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} a_n b_n \text{ converge.}}$$

Q7. Exemple.
Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Donc $e^{i\theta} \neq 1$, et par somme d'une série géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$:

$$\boxed{\text{pour } n \text{ entier naturel non nul, } \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}.}$$

b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $b_n = e^{in\theta}$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|B_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leqslant \frac{2}{1 - e^{i\theta}}.$$

donc, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On distingue 2 cas :

1er cas : $\alpha > 0$
donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle. Donc d'après la question **Q6**, la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

2ième cas : $\alpha \leqslant 0$
la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Conclusion

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0.}$$

Q8. Si $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$ alors, pour tout $r \in \,]0\,;R[$, la série converge normalement, donc uniformément sur tout disque $D_f(0, r)$ de centre 0 et de rayon r.

Q9. On considère la série entière de la variable complexe $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

a) Supposons par l'absurde que la série entière $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur $]-1\,;1[$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\frac{x^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc d'après le théorème de la double limite, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[x \to 1]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, d'où la contradiction.
Donc :

la série de la variable réelle $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ (en particulier la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

Autre solution, utiliser le fait que $x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est bornée sur $]-1\,;1[$ et $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas bornée sur $]-1\,;1[$ (à justifier : plus long).

b) On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.
pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leqslant 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathrm{Re}(z) \leqslant \cos\alpha$.
Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.
attention à ne pas confondre abscisse et ordonnée...

c) L'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

sont polynomiales donc continue sur $\mathbb{R}^2$, donc

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\} = f^{-1}(]-\infty\,;1])$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car image réciproque par f du fermé de $\mathbb{R}$: $]-\infty\,;1]$ et

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant \cos(\alpha)\right\} = g^{-1}(]-\infty\,;\cos\alpha])$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car image réciproque par g du fermé de $\mathbb{R}$: $]-\infty\,;\cos\alpha]$. Donc comme intersection de fermés :

$D_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leqslant 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant \cos\alpha\}$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

De plus D_α est bornée car inlus dans la boule de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, donc

D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

d) Soit $z \in D_\alpha$, on note $x = \mathrm{Re}\, z$. Par somme d'une série géométrique de raison $z \neq 1$ (car $x \leqslant \cos\alpha < 1$) :

$$\begin{aligned}
|F_n(z)| &= \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \\
&\leqslant \frac{1+\left|z^{n+1}\right|}{|1-z|} \\
&\leqslant \frac{2}{|\mathrm{Re}(1-z)|} \quad (\forall w \in \mathbb{C}, |\mathrm{Re}(w)| \leqslant |w|) \\
&\leqslant \frac{2}{1-x} \quad (z \in D_\alpha \text{ donc } x \leqslant \cos\alpha \leqslant 1) \\
&\leqslant \frac{2}{1-\cos\alpha}
\end{aligned}$$

pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \mathcal{R}e(z)$:

$$|F_n(z)| \leqslant \frac{2}{1-x} \leqslant \frac{2}{1-\cos\alpha}$$

e) Soit $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, d'après la question **Q9.d**, la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur D_α par $M_\alpha = \frac{2}{1-\cos\alpha}$, de plus la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle et par transformation d'Abel, $\forall z \in D_\alpha, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) F_k(z) + a_n F_n(z)$$

Pour tout $z \in D_\alpha, |a_n F_n(z)| \leqslant a_n M_\alpha$, donc $\|a_n F_n\|_{\infty,D_\alpha} \leqslant a_n M_\alpha$. Or $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc d'après le théorème des gendarmes : $\|a_n F_n\|_{\infty,D_\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc : la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur D_α.
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n - a_{n+1} \geqslant 0$, donc pour tout $z \in D_\alpha, |(a_n - a_{n+1})F_n(z)| = (a_n - a_{n+1})\,|F(z)| \leqslant (a_n - a_{n+1})M_\alpha$.
Donc : $\|(a_n - a_{n+1}F_n\|_{\infty,D_\alpha} \leqslant (a_n - a_{n+1})M_\alpha$ or d'après la question **Q6**, la série $\sum(a_n - a_{n+1})$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \|(a_n - a_{n+1})F_n\|_{\infty,D_\alpha}$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0}(a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur D_α.

la série entière $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α (pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

Problème : CCINP 2019 maths 1 (éléments de correction)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, f_n : x \mapsto \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Q10. Soit $x \in]-1, 1[$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 1$, donc $1 - x^n \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{|a_n x^n|}{1-x^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} |a_n x^n|$, or le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n x^n$ est 1, donc la série $\sum a_n x^n$ cva et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{a_n x^n}{1-x^n}$ cva.

Pour la remarque : Si on prend $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{2^n}{1-2^n}$ converge car $\frac{1}{(n+1)^2} \frac{2^n}{1-2^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Q11. Soit $x \in [-b, b]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 1 - b^n \leqslant 1 - x^n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{|a_n x^n|}{1-x^n} \leqslant \frac{|a_n b^n|}{1-b^n}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_{\infty,[-b\,;b]} \leqslant \frac{|a_n b^n|}{1-b^n}$. Or la série $\sum \frac{a_n b^n}{1-b^n}$ converge absolument par $Q4$, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_{\infty,[-b\,;b]}$ converge, donc la série de fonctions $\sum a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge normalement donc uniformément sur $[-b, b]$.

Q12. Les f_n sont continues sur $]-1, 1[$, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur chaque segment $[-b, b] \subset]-1, 1[$, donc f est continue sur $]-1, 1[$.

Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$. $\forall x \in]-1, 1[$, $f_n'(x) = a_n \frac{n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$.

Soit $b \in [0, 1[$, alors par le même raisonnement fait en $Q5$, $\forall x \in [-b, b]$; $|f_n'(x)| \leqslant \frac{|n a_n| b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$, donc $\|f_n'\|_{\infty,[-b\,;b]} \leqslant \frac{|n a_n| b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$. Or $\frac{n a_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} n a_n b^{n-1}$ et d'après le théorème de dérivation des séries entières, le rayon de convergence de $\sum n a_n x^{n-1}$ est celui de $\sum a_n x^n$ c'est à dire 1. Donc la série $\sum n a_n b^{n-1}$ converge absolument, et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n'\|_{\infty,[-b\,;b]}$ converge.

Donc la série $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout $[-b, b] \subset]-1, 1[$ et la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1, 1[$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et $\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$.

Donc $f'(0) = a_1$.

Q13. • Tout revient à montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment une partition de A.

Il est évident que chaque $I_n \subset A$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \subset A$.

Soit $(k, p) \in A$, il est clair que $(k, p) \in I_{kp} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = A$.

Si on suppose que $\exists (k, p) \in I_n \bigcap I_m$, alors $kp = n = m$, donc $I_n = I_m$, donc $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment une partition de A.

La famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est sommable, par le théorème de sommation par paquets on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n}^{+\infty} u_{k,p} \right)$$

• Soit $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{p \geqslant 1} a_n x^{np}$ converge absolument et $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} |a_n||x|^{np} = |a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ et la série $\sum |a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n}$ converge par $Q4$, donc la famille donnée est sommable, en appliquant ce qui précède à $u_{n,p} = a_n x^{np}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,p) \in I_n} a_k x^{kp}$$

.

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,p) \in I_n} a_k x^{kp} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{(k,p) \in I_n} a_k = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sum_{d/n} a_d = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$$

Et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$$

série géométrique.

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$$

Q14. Ici $a_n = 1$, d'après le cours le rayon de convergence de $\sum x^n$ est 1, donc les résultats de la partie I sont valables et avec les notations de la question 7 $b_n = \sum\limits_{d/n} 1 = d_n$, par application de la question 7

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n.$$

Q15. Ici $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \varphi(n) = \text{Card}\{k \in [\![1, n]\!] \ / \ k \wedge n = 1\}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant a_n \leqslant n$, par comparaison le rayon de la série $\sum a_n x^n$ est 1.

On a les diviseurs de 12 sont $1, 2, 3, 4, 6$ et 12, or $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$ et $\varphi(12) = 4$ l'égalité est donc vraie pour $n = 12$.

Soit $x \in]-1, 1[$. Par application de la question 7,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n,$$

avec ici $b_n = \sum\limits_{d/n} \varphi(d) = n$, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n.$$

Or $\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$, d'après le théorème de dérivation des séries entières :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Q16. On a $\forall x \in [0,1[,\ -\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

1 est dans l'adhérence de $[0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 1^-} (-1)^n \frac{x^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R}$, pour $x \in [0,1[$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ est une série alternée qui vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n} = 0$ et la suite $\left(\frac{x^n}{n}\right)_n$ est décroissante, alors par CSSA :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Donc : $\|R_n\|_{\infty,[-b\,;b]} \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc la convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ est uniforme sur $[-b\,;b]$, le théorème de la double limite s'applique et on a $-\ln 2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Q17. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*, g_n : x \mapsto a_n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$.
Soit $a \in]0,1[$. On a $\forall x \in [-a,a], \forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 < 1 - a^n \leqslant 1 - x^n$, donc :

$$\forall x \in [-a,a], \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \left| (-1)^k \frac{x^{k-1}}{1-x^k} \right| \leqslant \frac{a^{k-1}}{1-a^k}.$$

Donc : $\|g_n\|_{\infty,[-a\,;a]} \leqslant \frac{a^{k-1}}{1-a^k}$.
Or $\frac{a^{k-1}}{1-a^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} a^{k-1}$ et la série $\sum a^{k-1}$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|g_n\|_{\infty,[-a\,;a]}$ converge. Donc la série $\sum g_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[-a\,;a]$.
De plus

$$\lim_{x\to 0} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{1-x^k} = \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 1 \end{cases}$$

le théorème de la double limite s'applique et on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = -1$$

Un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0$ est $-x$.
On a $f(0) = 0$, donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, alors $f'(0) = -1 = a_1$ c'est ce qu'on a trouver à la question 6).

Q18. Toujours $a_n = (-1)^n$ et $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$

Donc $(1-x)f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n-1} \frac{(1-x)}{1-x^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}$.
Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \ g_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}$.
Or 1 est dans l'adhérence de $[0,1[$, et
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \lim\limits_{x\to 1^-} g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$,
Soient $x \in [0,1[$ et $k \in [\![0,(n-1)]\!]$, on a $\quad x^{n-1} \leqslant x^k$:
Donc $nx^{n-1} \leqslant 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$,
Alors $\forall x \in]0,1[; \forall n \in \mathbb{N}^*;\ \ |g_n(x)| \leqslant \frac{x^{n-1}}{nx^{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}$.
Soit $x \in]0,1[$. Les deux suites $(x^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et elles sont positives, donc la suite $(|g_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante comme elle est positive et tend vers 0, le CSSA s'applique et on a

$$\forall n \in \mathbb{N};\ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \right| \leqslant |g_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformément sur $]0,1[$, le théorème de la double limite s'applique et on a ;
$\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to 1^-} g_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ d'après la question 10).
Alors $(1-x)f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln 2$, qui s'écrit $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{-\ln 2}{(1-x)}$.