Corrigé de l'exercice 5 chapitre 12

On dispose d'une pièce déséquilibrée qui donne pile avec probabilité $\frac{2}{3}$. On effectue une suite de lancers.
Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \mathrm{P}(Z = n)$.

1. On note pour tout $k \in \mathbb{N}^*, P_k$: « on obtient pile au $k^{\text{ième}}$ lancer ». Donc $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants.

- $(Z = 1) = \varnothing$, on ne peut pas avoir deux piles consécutifs au premier lancer.
  Donc : $a_1 = \mathrm{P}(Z = 1) = 0$.
- $(Z = 2) = P_1 \cap P_2$, or P_1 et P_2 sont indépendants, donc $a_2 = \mathrm{P}(P_1 \cap P_2) = \mathrm{P}(P_1) \times \mathrm{P}(P_2) = (\frac{2}{3})^2$.
- $(Z = 3) = \overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3$, donc $a_3 = \frac{1}{3} \times (\frac{2}{3})^2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*, X_k = \mathbb{1}_{P_k}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si P_k est réalisé et 0 sinon et

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \{0,1\}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \begin{cases} n+1 & \text{si } \{k \in [\![2\,;n]\!] \mid x_k = x_{k-1} = 1\} = \varnothing \\ \min\{k \in [\![2\,;n]\!] \mid x_k = x_{k-1} = 1\} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

et $Y = f(X_1, \dots, X_n), Y_1 = f(X_2, \dots, X_{n+1})$ et $Y_3 = f(X_3, \dots, X_{n+2})$.
Or, $\forall k \in \mathbb{N}^*, X_k \sim \mathcal{B}(\frac{2}{3})$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendants, donc

$$(X_1, \dots, X_n) \sim (X_2, \dots, X_{n+1}) \sim (X_3, \dots, X_{n+2})$$

et $Y \sim Y_1 \sim Y_2$.
De plus, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!], (Z = k) = (Z = k)$.
Or, d'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements associé à X_1 :

$$\mathrm{P}(Z = n) = \mathrm{P}(X_1 = 0, Z = n) + \mathrm{P}(X_1 = 1, Z = n)$$

et

$$(X_1 = 0, Z = n) = (X_1 = 0, Y = n) = (X_1 = 0, Y_1 = n - 1)$$

or $(X_1, \dots, X_{n+1})$ est indépendante, donc d'après le lemme des cohalitions, $X_1 \perp\!\!\!\perp Y_1 = f(X_2, \dots X_{n+1})$, donc :

$$\mathrm{P}(X = 1, Z = n) = \mathrm{P}(X = 0) \times \mathrm{P}(Y_1 = n - 1) = \frac{1}{3}\,\mathrm{P}(Z = n - 1) = \frac{1}{3} a_{n-1}.$$

De plus, comme $n \geqslant 3$ et $(Z = 2) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)$:

$$(X_1 = 1, Z = n) = (X_1 = 1, X_2 = 0, Z = n) = (X_1 = 1, X_2 = 0, Y_2 = n - 2)$$

et de même que ci-dessus,

$$\mathrm{P}(X = 1, Z = n) = \frac{3}{9} a_{n-2}.$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, a_n = \tfrac{1}{3} a_{n-1} + \tfrac{2}{9} a_{n-2}.}$$

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, le calcul donne :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{n+1}.}$$

4. En appliquant le théorème de dérivation terme à terme à la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence 1, on obtient $Z \in L^1$ et $\mathrm{E}(Z) = \frac{15}{4}$.