Énoncer le résultat de comparaison série-intégrale et donner l'idée principale de la preuve.

⋆ *On doit étudier une intégrale généralisée en une borne réelle a non nulle. Que peut-on faire pour se ramener en 0 ?*

⋆ *On doit étudier l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et on remarque que la fonction intégrée est paire/impaire. Qu'en déduit-on ?*

Énoncer les théorèmes de comparaison par équivalent et par petit o.

⋆ Si f est une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[0,+\infty[$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ sont de même nature.

⋆ Comme la fonction f est positive :

- la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si sa suite de sommes partielles est majorée,
- l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[0,+\infty[$.

On utilise alors la monotonie de f pour établir des inégalités entre sommes et intégrales.
On peut alors montrer que la majoration de l'une entraîne la majoration de l'autre.

⋆ On peut poser le changement de variable $u = t - a$ ou $u = a - t$ (pour une intégrale d'origine en la variable t).

⋆ Par le changement de variable $u = -t$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et en cas de convergence, de même valeur si f paire et en valeur opposée si f impaire. Il suffit donc d'étudier $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

⋆ *Comparaison par équivalent :*

$$\left.\begin{array}{c} f(t) \underset{b}{\sim} g(t) \\ \forall t \in [a,b[, g(t) \geqslant 0 \\ (\text{ou } f(t) \geqslant 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

⋆ *Comparaison par petit o :*

$$\left.\begin{array}{c} f(t) = \underset{b}{o}(g(t)) \\ \forall t \in [a,b[, g(t) \geqslant 0 \\ \displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ CV} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ CV} \quad \Bigg| \quad \left.\begin{array}{c} f(t) = \underset{b}{o}(g(t)) \\ \forall t \in [a,b[, g(t) \geqslant 0 \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ DV} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ DV}$$

Citer le théorème d'intégration par parties sur les intégrales généralisées, en précisant soigneusement ses hypothèses.

Intégration

Citer le théorème de classe $\mathcal{C}^k$ des intégrales à paramètre ($k \in \mathbb{N}^*$). Comment peut-on procéder en cas de difficultés pour obtenir l'hypothèse de domination ? Comment peut-on prouver la classe $\mathcal{C}^\infty$?

Intégration

Citer le théorème fondamental de l'intégration.

Intégration

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Hypothèse : On suppose que $f \times g$ admet une limite finie en a et en b.

Conclusion :

- $\star$ Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
- $\star$ Lorsqu'elles convergent, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

N.B. : Il est aussi possible d'effectuer l'intégration par parties sur un segment $[x,y]$ puis d'étudier la limite lorsque x tend vers a et y tend vers b.

$\star$ *Hyp.* On suppose que (on ne mentionne pas les hypothèses de continuité par morceaux) :

$\boxed{1}$ $\boxed{\textit{Classe } \mathcal{C}^k}$ $\forall t \in I,\ x \mapsto f(t,x) \in \mathcal{C}^k(J)$

$\boxed{2}$ $\boxed{\textit{Intégrabilité}}$ $\forall x \in J,\ \forall \ell \in [[0,k-1]],\ t \mapsto \dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(t,x) \in L^1(I)$

$\boxed{3}$ $\boxed{\textit{Domination}}$ $\exists \varphi \in L^1(I)$ tq $\forall (t,x) \in I \times J,\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\right| \leqslant \varphi(t)$ (φ ne dépend pas de x).

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J et on a :

$$\forall \ell \in [[1,k]],\ \forall x \in J,\ g^{(\ell)}(x) = \int_I \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

$\star$ On pensera à appliquer le théorème sur un segment quelconque de J et on pourra conclure par le caractère local des propriétés.
$\star$ Pour prouver la classe $\mathcal{C}^\infty$, on prouve la classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$.
Si f est continue sur I alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$; F est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Donner la définition d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle.
Donner un exemple de fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ *possédant une infinité de points de discontinuité.*

On souhaite déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n g_n(t)dt$.
Comment peut-on procéder ?

Pour étudier une intégrale généralisée, que peut-on penser à utiliser comme comparaison lorsque la fonction intégrée contient $\sin t$? e^{-t} ? $t^\alpha|\ln t|^\beta$?

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.
On dit que f est continue par morceaux sur I lorsque sur chaque segment de I, f ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité en lesquels elle admet une limite à gauche finie et une limite à droite finie (lorsque ces limites ont un sens).
La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et elle est discontinue en tous les entiers.

On peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$:

$$f_n(t) = \begin{cases} g_n(t) \text{ si } t < n \\ 0 \text{ si } t \geqslant n. \end{cases}$$

On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n g_n(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ et on peut ensuite essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée.

⋆ Avec $\sin t$:
On peut utiliser $\sin t \underset{t \to 0}{\sim} t$ (ou un développement limité pour aller plus loin) et les inégalités : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leqslant 1$ et $|\sin t| \leqslant t$.
⋆ Avec e^{-t} :
On peut utiliser $e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} 1$ (ou un développement limité pour aller plus loin) et le résultat de croissances comparées : $\lim\limits_{t \to +\infty} t^a e^{-t} = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (pour obtenir une comparaison par petit o).
⋆ Avec $t^\alpha |\ln t|^\beta$:
On peut penser à utiliser une comparaison par petit o sauf quand $\alpha = -1$ (dans ce cas, on pose le changement de variable $u = \ln t$). On utilise pour cela les résultats de croissances comparées :

$$\lim_{t \to 0} t^a (-\ln t)^b = 0 \text{ et } \lim_{t \to +\infty} \frac{(\ln t)^b}{t^a} = 0 \text{ pour tout } a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

Proposer un plan d'étude pour déterminer la nature d'une intégrale généralisée.

Intégration

Que signifie f est intégrable sur I ?
Quelles sont les fonctions intégrables sur un segment ?

Intégration

Rappeler les exemples fondamentaux d'intégrales généralisées.

Intégration

$\boxed{1}$ Étude de la continuité par morceaux de la fonction intégrée pour identifier les bornes en lesquelles l'intégrale est généralisée.
Si fonction ***continue par morceaux sur un segment*** *ou* ***prolongeable par continuité*** *pour l'obtenir alors convergence de l'intégrale.*

$\boxed{2}$ Critères de comparaison : équivalent puis inégalité/petit o.
On pensera à étudier la convergence absolue en cas de problème avec l'hypothèse de positivité.

$\boxed{3}$ Si on connaît une primitive de la fonction intégrée, revenir à la définition (calculer l'intégrale ordinaire avec une variable à la place de la borne problématique puis étudier soigneusement le passage à la limite : convergence de l'intégrale ssi limite finie).

$\boxed{4}$ Changement de variable / intégration par parties pour se ramener à l'étude d'une intégrale plus simple.

$\boxed{3}$ et $\boxed{4}$ peuvent permettre aussi d'obtenir la valeur en cas de convergence.

Une fonction f est dite *intégrable sur I* lorsqu'elle est continue par morceaux sur I et que son intégrale sur I converge absolument.

Les fonctions intégrables sur un segment sont les fonctions continues par morceaux sur ce segment (car leur intégrale converge bien absolument).

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- ⋆ L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
- ⋆ L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente.
- ⋆ *Intégrales de Riemann :*
  - · L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  - · L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
  - · Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
    L'intégrale $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$.
Comment peut-on prouver que g *est définie sur* I *?*

Intégration

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(t,x)dt$, *définie sur* J.
Comment peut-on étudier la limite de g *en une borne* a *de* J *?*
Comment peut-on procéder en cas de difficultés pour obtenir l'hypothèse de domination ?

Intégration

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(t,x)dt$.
Comment peut-on prouver que g *est continue sur* J *?*
Comment peut-on procéder en cas de difficultés pour obtenir l'hypothèse de domination ?

Intégration

On prouve que pour tout $x \in I$, l'intégrale $\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}t$ converge.

⋆ *Théorème de convergence dominée à paramètre continu*
(On ne mentionne pas les hypothèses de continuité par morceaux.)
Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{Limite}}$ $\forall t \in I,\ \lim\limits_{x \to a} f(t,x) = \ell(t) \in \mathbb{K}$

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{Domination}}$ $\exists \varphi \in L^1(I)$ tq $\forall (t,x) \in I \times J$, $|f(t,x)| \leqslant \varphi(t)$ (φ ne dépend pas de x).

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \int_I \lim\limits_{x \to a} f(t,x)\,\mathrm{d}t$.
⋆ On peut modifier l'intervalle J pour un autre intervalle, ayant a pour borne.

⋆ (On ne mentionne pas les hypothèses de continuité par morceaux.)
Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{Continuité}}$ $\forall t \in I,\ x \mapsto f(t,x) \in \mathcal{C}(J)$

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{Domination}}$ $\exists \varphi \in L^1(I)$ tq $\forall (t,x) \in I \times J$, $|f(t,x)| \leq \varphi(t)$ (φ ne dépend pas de x).

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(t,x)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{C}(J)$.
⋆ On pensera à appliquer le théorème sur un segment quelconque de J et on pourra conclure par le caractère local de la continuité.

Soit F une fonction définie par une intégrale.
On souhaite étudier la dérivabilité de F.
Quels résultats peut-on penser à utiliser si la variable se trouve dans une borne de l'intégrale ? si la variable se trouve sous l'intégrale ?

Soit I un intervalle de bornes a et b (finies ou infinies) avec $a \neq b$.
Soit $f \in \mathcal{C}_m(I)$.
Dans chacun des cas suivants, donner des hypothèses permettant de conclure au résultat souhaité.

$\star$ *On sait que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ et on veut obtenir que pour tout $t \in I$, $f(t) = 0$.*

$\star$ *On souhaite prouver que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.*

$\star$ *On souhaite prouver que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0$.*

Sous quelles hypothèses peut-on échanger les symboles $\displaystyle\int_a^b$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$?

⋆ *Si la variable se trouve dans une borne de l'intégrale :* On pense à utiliser le théorème fondamental de l'intégration.
⋆ *Si la variable se trouve sous l'intégrale :* On pense à utiliser le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre.

- ⋆ Si f est continue sur I et de signe constant sur I alors pour tout $t \in I$, $f(t) = 0$.
- ⋆ Si $a \leqslant b$, f est positive sur I (sauf éventuellement en un nombre fini de points) et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- ⋆ Si $a < b$, f est positive sur I et n'est pas identiquement nulle, f est continue sur I et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$.

⋆ *Théorème du chapitre Suites et séries de fonctions*
Hyp. On suppose que (a et b deux réels avec $a \leqslant b$) :

$\boxed{1}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ $\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ CVU sur $[a,b]$.

⋆ *Théorème d'intégration terme à terme*
Hyp. On suppose que (I intervalle de bornes a et b, on ne mentionne pas les hypothèses de continuité par morceaux) :

$\boxed{1}$ $\sum f_n$ CVS sur I $\boxed{2}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in L^1(I)$ $\boxed{3}$ la série $\displaystyle\sum \int_I |f_n|$ CV.

⋆ *Théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles*
Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ $\sum f_n$ CVS sur I $\boxed{2}$ $\exists \varphi \in L^1(I)$ tq $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ \displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Conclusion : $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$.

Sous quelles hypothèses peut-on échanger les symboles $\lim\limits_{n\to+\infty}$ *et* $\displaystyle\int_a^b$ *?*

Intégration

Sous quelles hypothèses peut-on écrire :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \ \ ?$$

$$\int_a^b Re(f(t))dt = Re\left(\int_a^b f(t)dt\right) \ \ \text{(idem avec Im)?}$$

Intégration

⋆ *Théorème du chapitre Suites et séries de fonctions*
Hyp. On suppose que (a et b deux réels avec $a \leqslant b$) :

$\boxed{1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ $\boxed{2}$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur $[a,b]$.

⋆ *Théorème de convergence dominée*
Hyp. On suppose que (I intervalle de bornes a et b, on ne mentionne pas les hypothèses de continuité par morceaux) :

$\boxed{1}$ $\boxed{\textit{CVS}}$ $\forall t \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t) \in \mathbb{K}$

$\boxed{2}$ $\boxed{\textit{Domination}}$ $\exists \varphi \in L^1(I)$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ (φ ne dépend pas de n).

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

⋆ Si les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent alors l'intégrale $\int_a^b (f(t)+g(t))\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

⋆ Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge alors les intégrales $\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et on a :

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$