DM8 - suites et matrices

2025-2026

Exercice 1 : des suites pour déterminer des puissances de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez qu'il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

   On exprimera a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n et on précisera a_0, a_1, b_0 et b_1.
2. Soit (u_n) une suite définie par u_0 et u_1 deux réels, et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

   Donnez l'expression du terme u_n de la suite en fonction de n, de u_0 et de u_1.
3. Montrez que les suites (a_n) et (b_n) de la question 1 sont en fait des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 du type de la question 2. En déduire l'expression explicite de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

---

1. Voici l'analyse (qui n'a pas besoin de figurer sur la copie).
   Comme $A^0 = I_3$, on va poser $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. A partir de l'expression de A, on pose $a_1 = 1$ et $b_1 = -1$. Supposons qu'on ait des suites (a_n) et (b_n) telles que A^n soit de la forme proposée.
   Alors $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} a_n - 2b_n & -a_n & -a_n \\ -a_n & a_n - 2b_n & -a_n \\ -a_n & -a_n & a_n - 2b_n \end{pmatrix}$. En posant $a_{n+1} = a_n - 2b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$, on aura $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$
   Synthèse (suffisant sur la copie) : en posant les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\boxed{a_0 = 1, b_0 = -1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n - 2b_n \text{et } b_{n+1} = -a_n}$$

   On vérifie par récurrence qu'elles conviennent. :
   Initialisation : $A^0 = I_3$ et comme $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, on a bien

$$A^0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & b_0 \\ b_0 & a_0 & b_0 \\ b_0 & b_0 & a_0 \end{pmatrix}$$

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$ (avec les suites proposées)
   Alors $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} a_n - 2b_n & -a_n & -a_n \\ -a_n & a_n - 2b_n & -a_n \\ -a_n & -a_n & a_n - 2b_n \end{pmatrix}$ donc d'après la rélation qu'on a proposé,

$$A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

   La propriété est bien héréditaire.
   Conclusion : les suites proposées répondent au problème.
2. Une telle suite a pour equation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$, qui admet deux racines $\lambda = (-1)$ et $\mu = 2$, d'où $u_n = A(-1)^n + B2^n$. De plus on a $\begin{cases} u_0 = A + B \\ u_1 = -A + 2B \end{cases}$ d'où $B = (u_0 + u_1)/3$ et $A = (2u_0 - u_1)/3$.
   Au final, $\boxed{u_n = \dfrac{1}{3}((2u_0 - u_1)(-1)^n + (u_0 + u_1)2^n)}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+2} = a_{n+1} - 2b_{n+1}$ et $b_{n+1} = -a_n$, d'où $\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n}$. De même $b_{n+2} = -a_{n+1} = -a_n + 2b_n$ d'où $\boxed{b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n.}$ Il reste à appliquer la formule obtenue en 2., et on a :

$\boxed{a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n) \qquad b_n = \frac{1}{3}(-2^n + (-1)^n)}$ et enfin

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1} + (-1)^n & -2^n + (-1)^n & -2^n + (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^n & -2^n + (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1. Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} & = v_n - 2u_n \\ v_{n+1} & = 3u_n \end{cases}$$

   a) Montrez que la suite (t_n) définie par $t_n = u_n + v_n$ est constante. En déduire son expression générale en fonction de n.
   b) En déduire que (u_n) est arithmético-géométrique.
   c) Exprimez explicitement u_n et v_n en fonction de n.
2. On reprend la matrice N du DM précédent :

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Retrouver les deux entiers a et b tel que $N^2 = aN + bI_3$.
   b) Montrez qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ N^{n+1} = u_nN + v_nI$$

   et donnez la relation liant (u_{n+1}, v_{n+1}) et (u_n, v_n).
   Indication : la relation obtenue en $a)$ suffit : il n'y a pas besoin de calcul matriciel dans cette question...
   c) En déduire N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Soit $t_n = u_n + v_n$, alors $t_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = v_n - 2u_n + 3u_n = v_n + u_n = t_n$.
   La suite (t_n) est donc stationnaire et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n + v_n = u_0 + v_0 = 1}$.
   b) Comme $u_n + v_n = 1$, on obtient $u_{n+1} = -v_{n+1} + 1$, d'où $\boxed{u_{n+1} = -3u_n + 1}$.
   c) (u_n) est une suite arithmético géométrique. On cherche c tel que $c = -3c+1$, et on trouve $c = \frac{1}{4}$.
   On a alors $u_{n+1} - \frac{1}{4} = -3(u_n - \frac{1}{4})$ donc la suite $(u_n - \frac{1}{4})$ est géométrique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-3)^n(u_0 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}$.
   Ainsi $\boxed{u_n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^{n+1}) \text{ et } v_n = 1 - u_n = \frac{1}{4}(3 + (-3)^{n+1}).}$
2. a) En calculant N^2, on trouve $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. On observe alors que $\boxed{N^2 = -2N + 3I}$, c'est à dire $a = -2$ et $b = 3$.
   b) L'analyse qui suit n'a pas besoin d'être sur la copie :
   Pour $n = 0$, on a $N = 1N$, donc $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. Si on avait $N^{n+1} = u_nN + v_nI$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
   Alors
$$N^{n+2} = N \times N^{n+1} = u_nN^2 + v_nN$$
   Comme $N^2 = -2N + 3I$, on obtient
$$N^{n+2} = -2u_nN + 3u_nI + v_nN = (v_n - 2u_n)N + 3u_nI.$$
   Ainsi, si on veut avoir $N^{n+2} = u_{n+1}N + v_{n+1}N$, il est nécessaire de poser $u_{n+1} = v_n - 2u_n$ et $v_{n+1} = 3u_n$.
   Sur la copie, on rédige seulement la récurrence ci dessous :
   Montrons par récurrence que les suites (u_n) et (v_n) suivantes, obtenues par analyse, conviennent :
   $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et la double relation $\begin{cases} u_{n+1} & = v_n - 2u_n \\ v_{n+1} & = 3u_n \end{cases}$
   Pour $n = 0$, on a $N = 1N = u_0N + v_0I$, donc l'initialisation est validée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'on a $N^{n+1} = u_n N + v_n I$.
Alors $N^{n+2} = N \times N^{n+1} = u_n N^2 + v_n N$, d'où $N^{n+2} = -2u_n N + 3u_n I + v_n N$, ou encore

$$N^{n+2} = (v_n - 2u_n)N + 3u_n I.$$

Ainsi, on a bien $N^{n+2} = u_{n+1}N + v_{n+1}I$

Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{N^{n+1} = u_n N + v_n I.}$ avec (u_n) et (v_n) les suites proposées.

c) En utilisant la formule obtenue à la question 1 (et en prenant garde au fait qu'on a un décalage de 1 : c'est, pour tout $n \geq 1$, $N^n = u_{n-1}N + v_{n-1}I$), on trouve :

$$\boxed{N^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-3)^n & -2+2(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 2-2(-3)^n & 4(-3)^n & 2-2(-3)^n \\ -1+(-3)^n & 2-2(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}}$$