

5.1.2 Conduction électrique-Exercice 5

Afin de protéger une installation électrique, on ajoute un fil de terre (jaune et vert) relié à une tige très conductrice de forme cylindrique plantée sur une longueur L dans le sol, de rayon r_T et terminée par une extrémité hémisphérique.

a-Rappeler l'expression de la résistance R_b d'un barreau de section S , de longueur ℓ et de résistivité ρ .

b-Justifier que la résistance du sol peut s'exprimer par la relation :

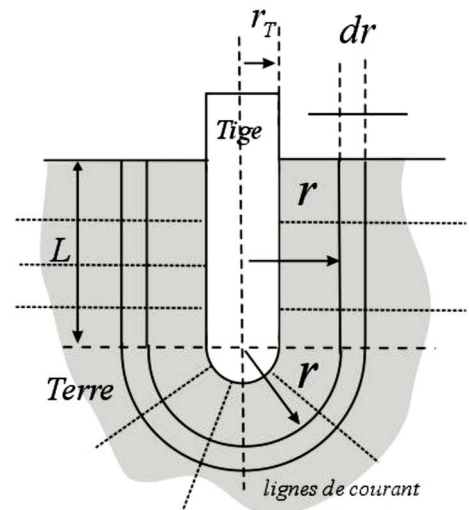
$$R_s = \int_{r_T}^{+\infty} \frac{\rho dr}{S(r)}$$

où ρ est la résistivité du sol et $S(r)$ est l'aire latérale d'un cylindre de longueur L et de rayon r plus l'aire de la demi-sphère de rayon r .

c-Préciser l'expression de $S(r)$.

d-Déduire l'expression littérale de la résistance R_s et sa valeur numérique.

Données : une primitive de $\frac{1}{rL+r^2}$ est $-\frac{1}{L} \ln \frac{L+r}{r}$; $L=3\text{ m}$; $\rho=100\text{ }\Omega\cdot\text{m}^{-1}$; $r_T=1\text{ cm}$



a-On a : $R_b = \frac{\rho \ell}{S}$

b-On découpe le sol en couches. Une couche élémentaire de résistance dR est comprise entre r et $r+dr$.

Toutes ces couches sont en série, donc :

$$R_s = \int_{r_T}^{+\infty} dR$$

Une couche élémentaire est formée par la mise en parallèle des petits volumes en rouge qui ont chacun

pour résistance $\frac{\rho dr}{dS(r)}$ d'après la question a-.

$$\text{Donc : } \frac{1}{dR} = \iint_{\text{surface } S(r)} \frac{dS(r)}{\rho dr} = \frac{S(r)}{\rho dr}$$

Au final : $R_s = \int_{r_T}^{+\infty} \frac{\rho dr}{S(r)}$

c-On a : $S(r) = 2\pi rL + 2\pi r^2$

$$d- R_s = \int_{r_T}^{+\infty} \frac{\rho dr}{2\pi(rL+r^2)} = \frac{\rho}{2\pi} \left[-\frac{1}{L} \ln \frac{L+r}{r} \right]_{r_T}^{+\infty} = \frac{\rho}{2\pi} \left[0 + \frac{1}{L} \ln \frac{L+r_T}{r_T} \right]$$

Donc : $R_s = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{L+r_T}{r_T}$

A.N : $R_s = 30,3\text{ }\Omega$

