Calculatrice interdite

PROBLEME 1 :

Vase de Tantale.

On note ρ la masse volumique de l'eau, supposée incompressible. La norme de l'accélération de la pesanteur est notée g.

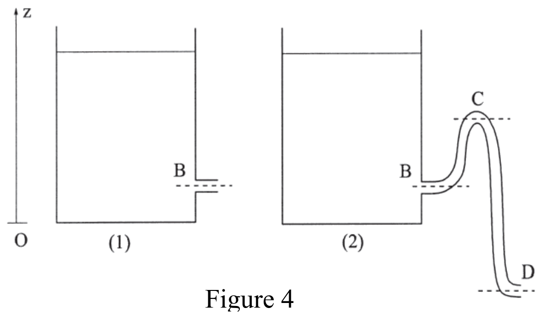


Figure 4

1) Vidange d'un réservoir

On considère un réservoir cylindrique dont la section horizontale est un disque d'aire S.
Les hauteurs sont repérées à l'aide d'un axe vertical (Oz) orienté vers le haut, et dont l'origine coïncide avec le fond du réservoir (figure 4 à gauche).
Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur h et percé d'un orifice situé au niveau du point B, à hauteur z_B. Cet orifice possède une section droite dont la surface vaut σ. On nomme D_s le débit volumique d'eau sortant par l'orifice B associé à l'écoulement de vidange du réservoir. La surface libre du réservoir (d'aire S) et l'extrémité de l'orifice B sont en contact avec l'air entourant le réservoir, à pression atmosphérique $P_0 = 1{,}0$ bar (toujours figure 4 à gauche).
Tous les écoulements considérés dans cette partie seront assimilés à des écoulements, parfaits, homogènes, incompressibles et laminaires. La variable de temps est notée t.

a) On assimile la vidange du réservoir à un écoulement quasi stationnaire, en faisant l'hypothèse que la hauteur $h(t)$ de la surface libre varie lentement par rapport aux vitesses caractéristiques de l'écoulement. Tracer l'allure plausible des lignes de courant associées à cet écoulement.
b) Appliquer la relation de Bernoulli le long de ces lignes de courant et déterminer, dans le cadre des hypothèses ci-dessus, et pour des sections droites S et σ quelconques (pas forcément $\sigma \ll S$), la vitesse du fluide v_B au niveau de l'orifice B.
Que vaut alors le débit D_s ?
c) En déduire la valeur algébrique de $\dot{h} = \frac{dh}{dt}$.
Que deviennent les expressions de v_B et $\dot{h}$ pour $\sigma \ll S$? Quel théorème retrouve-t-on ?

Dans toute la suite on considère que σ ≪ S.

2) Influence du siphon

Le siphon (figure 4 à droite) est une portion coudée de conduite, de section uniforme σ, dont la hauteur maximale, représentée par le point C, se trouve à une hauteur z_C, supérieure à la hauteur z_B de l'orifice d'entrée de la conduite.
Le siphon peut se trouver dans deux états.

- Dans l'état « amorcé », il ne contient pas d'air, et on peut considérer que la relation de Bernoulli s'applique d'une extrémité à l'autre du siphon. L'extrémité D située à l'opposé du réservoir se trouve alors en contact avec l'air à pression atmosphérique P_0.
- Dans l'état désamorcé, le siphon contient de l'air, la continuité de l'écoulement dans le siphon est rompue, et le débit à travers sa conduite est nul.

On supposera qu'une fois amorcé, le siphon reste dans cet état jusqu'à ce que l'air pénètre par l'orifice situé en B. Le siphon est toujours amorcé lorsque le niveau d'eau excède z_C.

a) Lorsque le siphon est amorcé, le réservoir se vide avec un débit sortant D_s, que l'on exprimera en fonction de h, g, σ et de la hauteur d'un des points B, C ou D
b) Etablir une équation différentielle du premier ordre en t pour l'évolution temporelle de la hauteur h de la surface libre, dans le régime où le siphon est amorcé. Le réservoir n'est alimenté par aucune source.
c) Trouver la solution de cette équation différentielle, en partant d'une condition initiale $h(0) = h_0 \geq z_C$.
En déduire la durée nécessaire t_1 pour que le siphon se désamorce.

3) Réservoir alimenté

Le réservoir est désormais alimenté en permanence par un filet d'eau de débit D_i, arrivant par l'orifice A, et qui ne perturbe pas l'écoulement de vidange (figure 5).

a) Comment doit-on modifier l'équation différentielle portant sur h en présence d'un débit D_i venant alimenter le réservoir, le siphon étant amorcé ?
b) Montrer que l'équation différentielle obtenue admet une solution stationnaire, de hauteur h_S constante, que l'on exprimera en fonction de z_D, D_i, σ et g.
Cette solution parait-elle acceptable si la valeur de h_S associée à un débit D_i est telle que $h_S < z_B$? Justifier votre réponse.

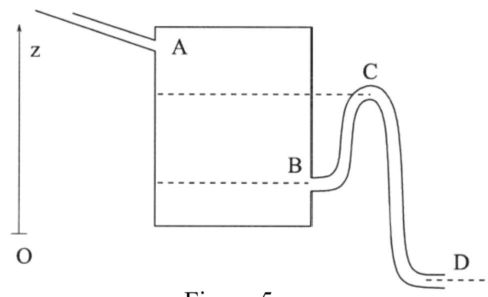


Figure 5

c) Décrire l'évolution de la hauteur $h(t)$ lorsque le siphon est désamorcé.

d) Montrer que si le débit D_i est plus faible qu'une valeur critique D_C, le système représenté sur la figure 5 se comporte comme un oscillateur, dont le débit de sortie est une fonction du temps périodique.
Déterminer l'expression de D_C.

e) On suppose que $D_i < D_C$. Représenter schématiquement l'allure temporelle de la hauteur $h(t)$ en fonction du temps, en réfléchissant bien à la forme des portions de courbes (rectiligne ou non, concavité positive ou non), sans pour autant faire une étude de fonction poussée.
Déterminer, en fonction des paramètres du problème la période T du phénomène, en négligeant, lorsque le siphon est amorcé, le débit entrant D_i par rapport au débit sortant D_S.

4) Analogie

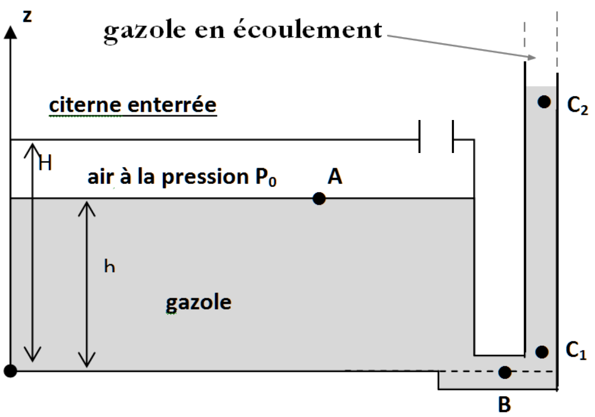
Quel type de montage électronique a un comportement analogue à ce système hydraulique ? Quelles sont les grandeurs physiques qui se correspondent ? Comment se fait l'apport d'énergie dans les deux cas ?

PROBLEME 2 : écoulement de gazole

On considère le dispositif ci-contre. A droite de B, il y a une conduite cylindrique verticale de grande longueur et de diamètre d = 2a, au-dessus de laquelle une pompe aspire le gazole. La figure ci-contre ne représente qu'une portion $\ell = C_1C_2$ de cette conduite.

L'étude de l'écoulement entre C_1 et C_2 nécessite la prise en compte de la dissipation d'énergie par frottement dû à la viscosité du gazole.

Dans la suite, on considère que le gazole est un fluide incompressible, de masse volumique constante ρ, de viscosité dynamique η, en écoulement stationnaire.



On suppose de plus que l'écoulement est laminaire et que le champ de vitesse est à symétrie cylindrique

$$\vec{V}(r) = V(r)\vec{e}_z$$

avec V(r) > 0 et une vitesse nulle le long des parois et maximale sur l'axe de la conduite. Les pressions sont supposées constantes pour une altitude donnée : p_{C1} est la pression en C_1 à l'altitude z_{C1}, p_{C2} est la pression en C_2 à l'altitude z_{C2}.

On isole par la pensée (voir figure plus loin) un cylindre de fluide de rayon r inférieur à a et de longueur ℓ. Ce cylindre subit des forces pressantes en C_1 et C_2, son poids et des forces visqueuses modélisées par la loi suivante :

$$\vec{f} = \eta \frac{dV}{dr} \Sigma \, \vec{e}_z$$

où Σ représente la surface latérale de contact entre le fluide contenu dans le cylindre et celui à l'extérieur du cylindre.

1. Faire un bilan de quantité de mouvement pour ce cylindre et établir la relation suivante :

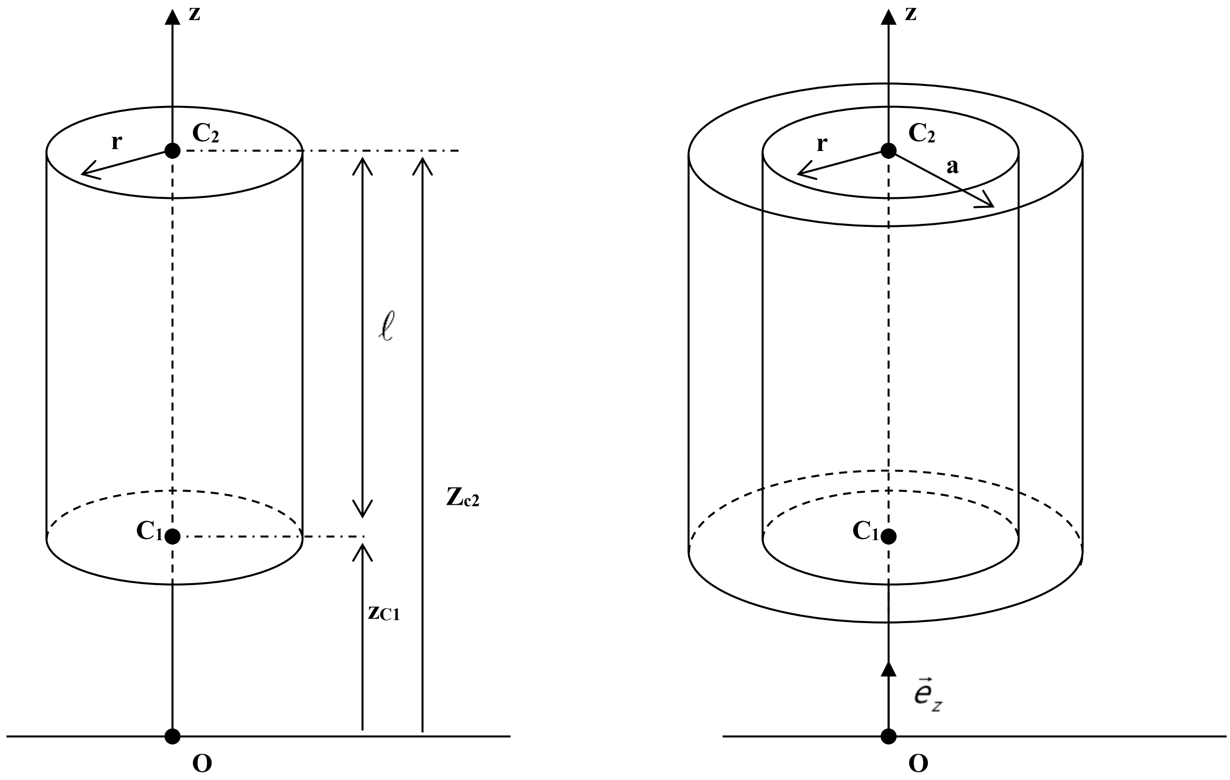
$$\frac{dV}{dr} = -\alpha \left(\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}\right) r$$

avec $\tilde{p} = p + \rho g z$ et α un facteur que l'on exprimera à l'aide de η et ℓ. Commentez le signe de α.

2. Montrer que *V(r)* s'écrit : $V(r) = V_{max}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$. Exprimer V_{max} à l'aide de α, a et $\left(\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}\right)$.

3. Déterminer l'expression du débit volumique Q_V à l'aide de α, a et $\left(\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}\right)$.

4. En déduire l'expression de la vitesse moyenne V_{moy} dans une section de la conduite (encore appelée vitesse débitante) à l'aide de α, a et $\left(\tilde{p}_{C_1} - \tilde{p}_{C_2}\right)$.



La « perte de charge régulière » (due à la dissipation d'énergie à cause des frottements visqueux) est définie par $\Delta p_r = \lambda \frac{1}{2}\rho V_{moy}^2 \frac{\ell}{d}$ *où* λ *est une constante sans dimension dépendant de la nature de l'écoulement et de la rugosité de la conduite,* ℓ *la longueur de la conduite et d son diamètre.*
On a par ailleurs : $\tilde{p}_{C_2} - \tilde{p}_{C_1} = -\Delta p_r$ pour une canalisation de section constante.

5. Déterminer l'expression de λ à l'aide de η, ρ, V_{moy} et *a*.

6. Rappeler l'expression du nombre de Reynolds R_e pour une conduite cylindrique en fonction de son diamètre d, de la vitesse moyenne V_{moy}, de la masse volumique ρ et de la viscosité η.

Pour un écoulement laminaire, en déduire l'expression de λ à l'aide du nombre de Reynolds, R_e.

7. Rappeler comment le nombre de Reynolds, R_e peut être utilisé pour caractériser la nature de l'écoulement.

PROBLEME 3 : CCINP PSI 2022

Partie I - Traitement des effluents et récupération de métaux précieux

Dans l'industrie du cuir, des sels de chrome sont ajoutés aux bains de tannage pour rendre le cuir imputrescible. Ces sels ne réagissent que partiellement avec les peaux, 40 à 50 % du chrome n'est pas absorbé. Le chrome VI est classé cancérogène pour l'Homme (groupe 1 du CIRC, groupe 1A par l'Union Européenne et groupe A par l'US-EPA), mais uniquement lors d'une exposition par inhalation (US EPA, 1998).
Les effluents doivent être traités de façon à respecter les normes de rejets en vigueur avant d'être rejetés. On se propose ici d'étudier certains aspects chimiques liés au fonctionnement d'une station d'épuration.

I.1 - Déchromatation

La **figure 1** correspond au diagramme E-pH du chrome, tracé pour une concentration totale en élément chrome dissous de 10^{-1} mol·L^{-1}. Les espèces prises en compte sont $Cr_2O_7^{2-}$, Cr^{2+}, Cr^{3+}, $Cr(OH)_{3(s)}$, $Cr_{(s)}$ et CrO_4^{2-}.

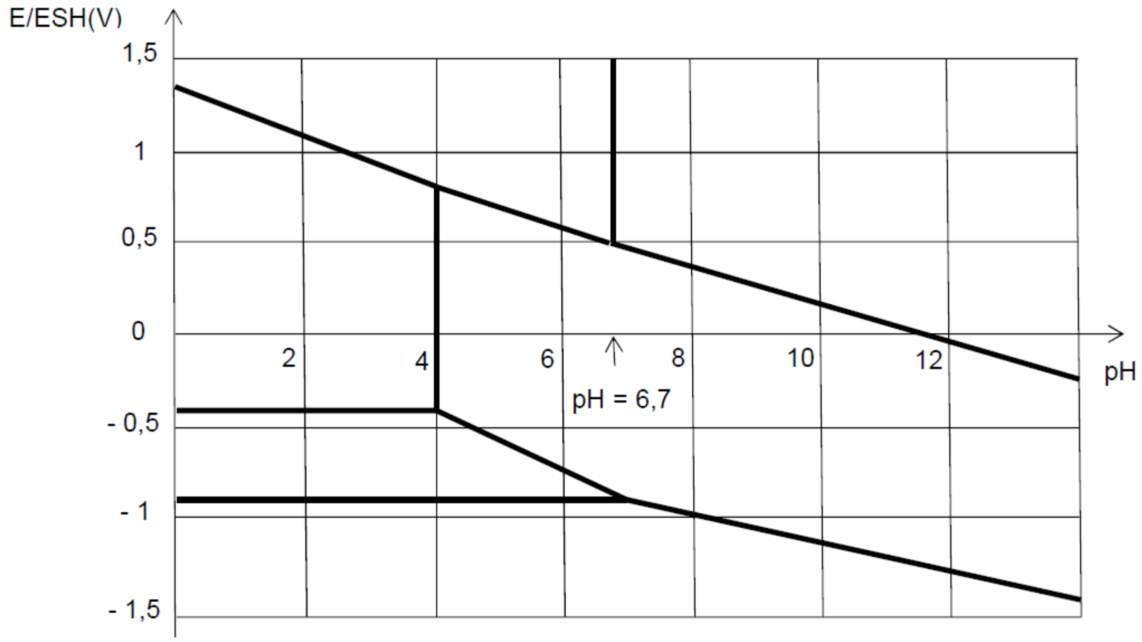


Figure 1 - Diagramme E-pH du chrome

Q1. Déterminer le nombre d'oxydation du chrome dans chacune des six espèces.
Montrer que le couple $Cr_2O_7^{2-}/CrO_4^{2-}$ forme un couple acido-basique. Préciser lequel est l'acide et lequel est la base.
Reproduire sur votre copie l'allure du diagramme E-pH de la **figure 1** en associant un domaine à chacune des six espèces.

Q2. Quel est le pH de début de précipitation de l'hydroxyde de chrome III ? En déduire le produit de solubilité de l'hydroxyde de chrome III, qui correspond à la constante d'équilibre K_s de la réaction :

$$Cr(OH)_{3(s)} = Cr^{3+} + 3OH^-$$

Q3. On considère la réaction chimique de constante d'équilibre K_1 :

$$Cr_2O_7^{2-} + H_2O = 2CrO_4^{2-} + 2H^+$$

On rappelle que sur la frontière qui sépare deux espèces dissoutes, il y a autant d'élément chrome dans chacune de ces deux espèces.
Déterminer, à l'aide du diagramme E-pH du chrome, la valeur numérique $pK_1 = -\log K_1$ de cette constante d'équilibre.

Q4. Lors de la déchromatatation, les ions $Cr_2O_7^{2-}$ sont réduits en milieu acide en ions Cr^{3+} par les ions HSO_3^- qui s'oxydent en ions SO_4^{2-}. Écrire la réaction chimique qui correspond à la réduction d'une mole de $Cr_2O_7^{2-}$. Déterminer la valeur numérique de la constante d'équilibre K_2 associée à cette réaction. Conclure.

I.2 - Décyanuration

Les ions cyanure CN^-, des eaux polluées, sont éliminés par oxydation, en milieu fortement basique, en ions CNO^-, à l'aide d'un excès d'eau de javel suivant la réaction :

$$CN^- + ClO^- = CNO^- + Cl^-$$

L'eau de javel sera assimilée ici à une solution équimolaire d'ions Cl^- et d'ions ClO^-. La **figure 2** correspond au diagramme E-pH du chlore, tracé pour une concentration totale en élément chlore dissous de 10^{-1} mol·L^{-1}.

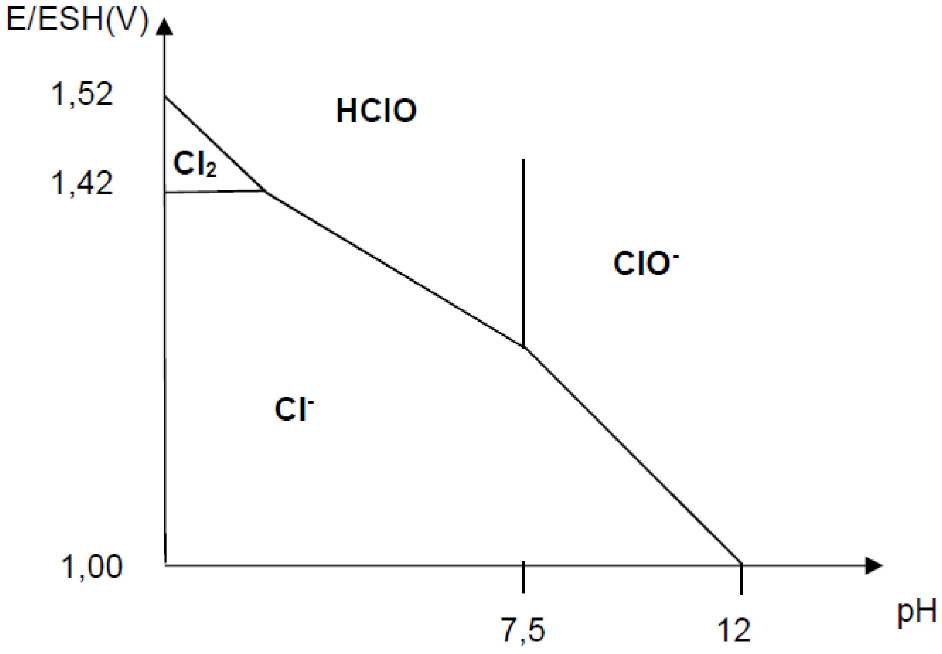


Figure 2 - Diagramme E-pH du chlore

Q5. Justifier qualitativement à l'aide des diagrammes E-pH que cette réaction est quasi-totale.

Le dichlore Cl_2 est un gaz très toxique, voire mortel.

Q6. Pourquoi est-il déconseillé d'utiliser de l'eau de javel en milieu trop acide. Ecrire l'équation chimique qui se produit lorsqu'on acidifie trop fortement une solution d'eau de javel.

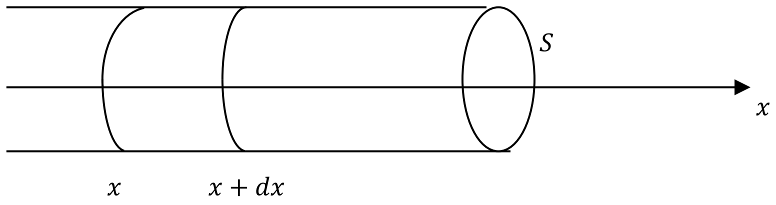
Données	
Potentiels standard d'oxydoréduction à 298 K : $E°(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+})$ = 1,33 V $E°(SO_4^{2-}/HSO_3^-)$ = 0,17 V $E°(CNO^-/CN^-)$ = – 0,13 V $E°(Au(CN)_2^-/Au_{(s)})$ = – 0,6 V Unité de surface : 1 hectare = 10^4 m^2 Perméabilité magnétique de l'air assimilé au vide : $\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1}	Pouvoir calorifique (énergie thermique libérée lors de la combustion d'une mole de carburant) : méthane : 803 kJ·mol^{-1} fuel : 7 600 kJ·mol^{-1} Formules trigonométriques : $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

PROBLEME 4 : Ondes sonores

A] Equations des ondes sonores :

On considère ici la propagation unidirectionnelle, suivant l'axe Ox, d'une onde plane sonore dans l'air. Celui-ci, initialement au repos, est assimilable à un gaz parfait non visqueux. Les transformations thermodynamiques sont supposées adiabatiques et réversibles.

On note P_0 et ρ_0 , la pression et la masse volumique de l'air au repos (ρ_0 =1,3 kg. m^{-3} et P_0 = 1,0.10^5 Pa).
On note χ le coefficient de compressibilité isentropique de l'air (χ = 7,0 10^{-6} Pa^{-1}).
On définit comme système la masse δm d'air située, au repos, entre les abscisses x et $x + dx$, d'un cylindre fictif horizontal, d'axe (Ox) et de section S.



Après une perturbation élémentaire, les caractéristiques de l'air sont décrites par les grandeurs suivantes, fonctions de la position x et du temps t :

$\vec{v}(x,t) = v(x,t)\,\vec{u}_x$: la vitesse du fluide,

$P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ la pression de l'air,

$\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$ la masse volumique de l'air.

A.1.a) Ecrire une équation de la dynamique (E_1) pour une particule de fluide, sans prendre en compte la pesanteur.

A.1.b) Ecrire l'équation locale (E_2) de conservation de la masse ou équation de continuité.

A.1.c) Rappeler l'expression de χ en fonction de ρ et P ou de leurs dérivées partielles (E_3).

A.2.a) Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique.

A.2.b) Simplifier les équations E_1, E_2 et E_3 dans le cadre de l'approximation acoustique et de la propagation unidirectionnelle suivant l'axe des x. On notera E_4, E_5 et E_6 les équations correspondantes.

A.3.a) En déduire les équations de propagation de l'onde acoustique vérifiées par les grandeurs $v(x,t)$ et $p(x,t)$.

A.3.b) Quelle est l'expression de la célérité c_0 des ondes acoustiques dans l'air ? En donner une valeur approchée, compte tenu des valeurs numériques données dans cet énoncé.

A.3.c) La célérité c_0 dépend-elle de la température T de l'air ? Si oui, établir la dépendance entre c_0 et T.

B] Cas de l'onde sonore plane progressive sinusoïdale :

B.1.a) L'onde sonore plane progressive sinusoïdale (O.S.P.P.S.) a-t-elle une structure transverse ou longitudinale ? Justifier.

B.1.b) Citer un exemple d'onde plane à structure longitudinale ainsi qu'un exemple d'onde plane à structure transverse.

Pour modéliser l'O.S.P.P.S., on adopte les notations suivantes pour lesquelles les fonctions complexes associées aux grandeurs sinusoïdales sont soulignées : $\underline{p}(x,t) = p_0\, e^{j(\omega t - kx)} = \underline{p_0}\, e^{-jkx}$ avec $\underline{p_0} = p_0 e^{j\omega t}$

$$\underline{\vec{v}}(x,t) = \overrightarrow{v_0}\, e^{j(\omega t - kx)} = \underline{v}(x,t)\overrightarrow{e_x}$$

B.2.a) Dans quel sens cette onde se propage-t-elle ? Le montrer.

B.2.b) Etablir la relation de dispersion liant ω et k.

B.2.c) Etablir la relation entre $\underline{p}(x,t)$ et $\underline{v}(x,t)$. La surpression acoustique $p(x,t)$ et la vitesse $v(x,t)$ sont-elles en phase, en opposition de phase ou en quadrature de phase ?

La puissance $\mathcal{P}$ rayonnée par l'O.S.P.P.S. à travers une section S perpendiculaire à l'axe (Ox) est la puissance de la force de surpression appliquée à la section S se déplaçant avec la vitesse $v(x,t)$.

On a $\mathcal{P} = R\,S$.

B.3.a) Nommer le vecteur $\vec{R} = R\vec{e}_x$.

B.3.b) Exprimer la valeur moyenne $< R >$ de R en fonction de ρ_0, c_0 et p_0.

B.3.c) Définir l'intensité acoustique I, puis donner son expression en dB. Quelle différence présente cette définition attachée aux dB par rapport à celle utilisée pour des diagrammes de Bode, et pourquoi ?

B.3.d) Si l'amplitude de la surpression acoustique de l'OSPPS est multipliée par 2, par combien est multipliée l'amplitude de la vitesse ? Par combien est multipliée l'intensité acoustique ?

B.3.e) Si l'amplitude de la surpression acoustique de l'OSPPS est multipliée par 100, comment est modifiée l'intensité en dB ?