

PROBLEME 1 : Vase de Tantale.**1) Vidange d'un réservoir**

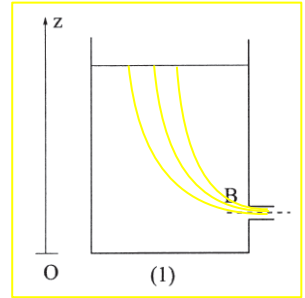
a) Voir figure ci-contre.

b) Le fluide étant en écoulement **parfait et incompressible**, le produit vitesse \times section se conserve le long d'un tube de courant. En appelant A le point du démarrage d'une ligne de courant, on a $v_A S = v_B \sigma$. Les pressions étant les mêmes à l'entrée et à la sortie (pression atmosphérique), on peut écrire pour cet écoulement parfait, quasi-stationnaire, homogène et incompressible :

$$\rho g h + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\sigma}{S} v_B \right)^2 = \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2. \text{ D'où } v_B = \sqrt{\frac{2g(h-z_B)}{1-\sigma^2/S^2}} \text{ et } D_S = v_B \sigma = \sigma \sqrt{\frac{2g(h-z_B)}{1-\sigma^2/S^2}}$$

c) h décroît dans le temps donc $\frac{dh}{dt} = -\frac{\sigma}{S} \sqrt{\frac{2g(h-z_B)}{1-\sigma^2/S^2}}$. Si $\sigma \ll S$, on peut écrire des expressions

approchées : $v_B = \sqrt{2g(h-z_B)}$ et $\frac{dh}{dt} = -\frac{\sigma}{S} \sqrt{2g(h-z_B)}$. L'expression de v_B correspond à la **formule de Toricelli**.

**2) Influence du siphon**

a) On peut reprendre les calculs précédents en remplaçant B par D, point où on retrouve la pression atmosphérique :

$$D_S = \sigma \sqrt{2g(h-z_D)}$$

$$b) \frac{dh}{dt} = -\frac{\sigma}{S} \sqrt{2g(h-z_D)}$$

c) L'équation différentielle n'est pas linéaire. On peut la résoudre par exemple en séparant les variables :

$$\frac{dh}{\sqrt{h-z_D}} = -\frac{\sigma}{S} \sqrt{2g} dt, \text{ dont la solution est } \sqrt{h-z_D} = -\frac{\sigma}{2S} \sqrt{2g} t + \sqrt{h_0-z_D}.$$

On en déduit la durée nécessaire pour un désamorçage, sachant qu'il se produit quand le niveau du liquide arrive en B :

$$\sqrt{z_B-z_D} = -\frac{\sigma}{2S} \sqrt{2g} t_1 + \sqrt{h_0-z_D}, \text{ d'où } t_1 = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{h_0-z_D} - \sqrt{z_B-z_D}).$$

3) Réservoir alimenté

a) Pendant dt , le volume entrant est $D_i dt$, le volume sortant par le siphon est $\sigma \sqrt{2g(h-z_D)} dt$. La variation algébrique du volume dans le réservoir est $S dh$. La nouvelle équation différentielle est donc $S \frac{dh}{dt} = D_i - \sigma \sqrt{2g(h-z_D)}$.

b) La hauteur de liquide est constante quand le débit entrant est égal au débit sortant, donc pour $D_i = \sigma \sqrt{2g(h-z_D)}$, ce qui se produit pour une hauteur $h_S = z_D + \frac{D_i^2}{2g\sigma^2}$. Ceci n'est possible que pour $h_S > z_B$ puisque dans le cas contraire, le siphon est **désamorcé**, donc il y a entrée de liquide sans qu'il y ait sortie, donc le niveau ne peut pas rester à une hauteur constante.

c) Lorsque le siphon est désamorcé, le niveau monte régulièrement en raison du débit entrant (il n'y a pas de débit sortant). L'équation différentielle devient $\frac{dh}{dt} = \frac{D_i}{S}$, donc $h(t) = \frac{D_i}{S} t + Cte$. La hauteur $h(t)$ est une fonction affine du temps.

d) Si le débit entrant est très important, il reste toujours supérieur à celui sortant (qui lui est limité par la hauteur de la cuve), donc le niveau monte jusqu'à ce que la cuve déborde, puis il n'évolue plus.

Si le débit entrant n'est pas suffisant pour provoquer le débordement, trois évolutions peuvent se produire :

- ou bien $h_S > z_C$ et le niveau se stabilise **plus haut que C** ; il n'y a **plus d'évolution** ;
- ou bien $z_B < h_S < z_C$ et le niveau se stabilise pour une hauteur intermédiaire **entre B et C** ; il n'y a **plus d'évolution** ;
- ou bien $h_S < z_B$ et le niveau baisse jusqu'à ce que le siphon **se désamorce**, puis il remonte jusqu'à ce qu'il s'amorce,...

La valeur critique du débit D_i est donc celle correspondant à $h_S = z_B$: $D_C = \sigma \sqrt{2g(z_B-z_D)}$.

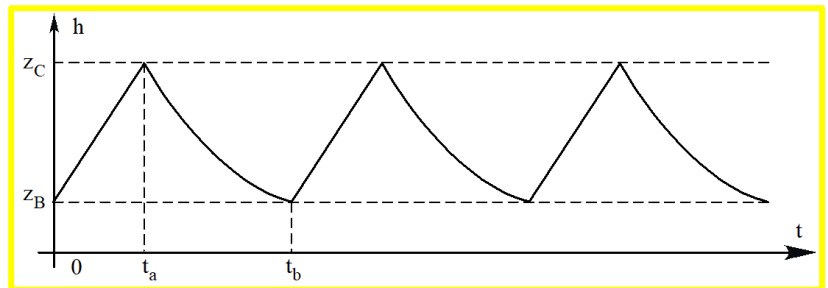
e) Lors de la montée, la loi est affine (cf c)). Lors de la **descente**, le niveau diminue de moins en moins vite puisque le **débit sortant diminue quand la hauteur diminue**. D'où l'allure ci-contre.

La durée de la phase affine est $t_a = \frac{S}{D_i} (z_C - z_B)$.

En ce qui concerne l'autre phase, si on néglige le débit entrant comme le propose l'énoncé, on peut utiliser le résultat du 2) c) :

$$t_b - t_a = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{z_C-z_D} - \sqrt{z_B-z_D}).$$

La période est la **somme des deux** : $T = \frac{S}{D_i} (z_C - z_B) + \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{z_C-z_D} - \sqrt{z_B-z_D})$.

**4) Analogie**

L'oscillateur hydraulique étudié ci-dessus est un **oscillateur de relaxation**, comme ceux vus en électronique, avec un comparateur à hystérésis et un intégrateur. De la même façon qu'un **condensateur peut accumuler les charges électriques** puis les déstocker, la **cuve peut stocker du liquide** puis le libérer.

Les **altitudes z_B et z_C** jouent des rôles de seuils. Ils sont différents, comme les deux seuils d'un comparateur à hystérésis.

Dans le cas **électronique**, l'énergie est apportée par l'alimentation de l'ALI ;

dans le cas **hydraulique**, cette énergie est apportée par l'arrivée de liquide.

PROBLEME 2 :

1. Bilan de quantité de mouvement pour le {cylindre}. D'une part, on est en régime stationnaire donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$, d'autre part, le champ des vitesses en coordonnées cartésiennes serait de la forme $\vec{v} = v(x, y) \vec{e}_z$ donc $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{0}$. L'accélération de chaque particule de fluide composant le système est nulle. Donc la quantité de mouvement du système ne change pas au cours du temps : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$.

De plus, le théorème de la résultante dynamique appliqué au système dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, s'écrit : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$, d'où $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$.

Les forces sont rappelées dans l'énoncé : forces pressantes en C_1 et C_2 (les forces pressantes latérales s'annulent par symétrie), le poids et les forces visqueuses, soit en projection sur (Oz):

$$p_{C1} \pi r^2 - p_{C2} \pi r^2 - \rho g (z_{C2} - z_{C1}) \pi r^2 + \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r \ell = 0,$$

d'où la relation de l'énoncé $\frac{dv}{dr} = -\alpha(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})r$ avec : $\alpha = \frac{1}{2\eta\ell}$.

Supposons $V(r) > 0$, il faut alors $\tilde{p}_{C1} > \tilde{p}_{C2}$. $\alpha > 0$, la vitesse décroît avec r , elle est maximale au centre ($r=0$) et nulle en $r=a$, par adhérence aux parois. Le signe de α est donc cohérent.

2. Le terme $\alpha(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})$ ne dépend pas de r . En intégrant par rapport à r l'équation de la question précédente et en utilisant la condition d'adhérence $V(a) = 0$, on obtient : $V(r) = \frac{\alpha(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})a^2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$, soit $V_{max} = \frac{\alpha(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2})a^2}{2}$.

$$3. Q_v = \iint_{\text{section}} V(r) dS = \int_0^a V(r) 2\pi r dr = \frac{\pi a^2 V_{max}}{2} \text{ soit } Q_v = \frac{\pi \alpha (\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}) a^4}{4}$$

$$4. \text{ Par définition } Q_v = \pi a^2 V_{moy} \text{ d'où } V_{moy} = \frac{V_{max}}{2} = \frac{\alpha(\tilde{p}_{C1} - \tilde{p}_{C2}) a^2}{4}$$

5. En utilisant la question précédente pour exprimer la perte de charge, on a :

$$\Delta p_r = \frac{4V_{moy}}{\alpha a^2} = \frac{8\eta\ell V_{moy}}{a^2} = \lambda \frac{1}{2} \rho V_{moy}^2 \frac{\ell}{2a} \text{ d'après l'énoncé soit } \lambda = \frac{32\eta}{a\rho V_{moy}}$$

$$6. R_e = \frac{\rho V_{moy} d}{\eta} = \frac{2\rho V_{moy} a}{\eta} \text{ d'où } \lambda = \frac{64}{R_e}$$

8. Si $R_e > 2.10^3$, l'écoulement est turbulent, sinon, il est laminaire.

PROBLEME 3 :

Q1. Nombre d'oxydation du chrome dans les espèces chromées :

+VI pour $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ et CrO_4^{2-} +III pour Cr^{3+} et $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}$
+II pour Cr^{2+} 0 pour $\text{Cr}_{(s)}$

Pour savoir quelle est l'espèce acide et quelle est l'espèce basique entre $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ et CrO_4^{2-} , le plus simple est de s'appuyer sur la réaction donnée à la question Q3 : $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + \text{H}_2\text{O} = 2\text{CrO}_4^{2-} + 2\text{H}^+$.

$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ libère des protons H^+ .

c'est un acide ; CrO_4^{2-} est la base conjuguée.

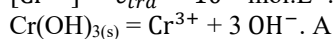
Diagramme complété : voir ci-contre

Q2. pH de début de précipitation de $\text{Cr}(\text{OH})_{3(s)}$: c'est la frontière verticale pH = 4.

Sur cette frontière :

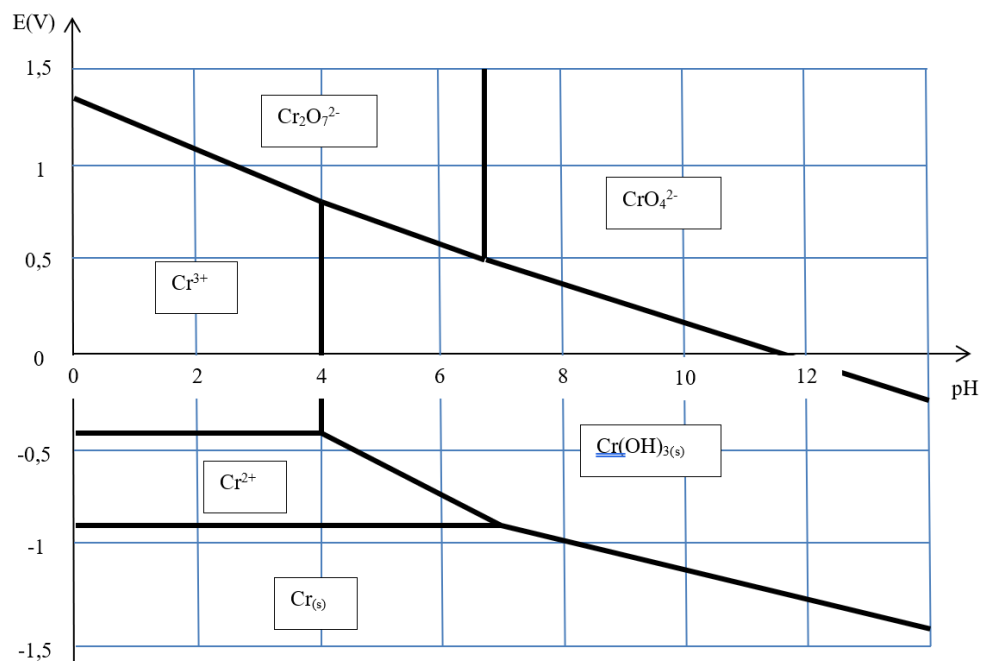
$$[\text{OH}^-] = 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1} \text{ et}$$

$$[\text{Cr}^{3+}] = c_{tra} = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}.$$



l'équilibre chimique, la loi

d'action des masses s'écrit :



$$K_S = \frac{[Cr^{3+}][OH^-]^3}{c_{ref}^4} = 10^{-1} * 10^{-30} = \boxed{10^{-31}}.$$

Q3. A l'équilibre chimique, $K_1 = \frac{[CrO_4^{2-}]^2 [H^+]^2}{[Cr_2O_7^{2-}] c_{ref}^3}$

A la frontière entre $Cr_2O_7^{2-}$ et CrO_4^{2-} , on a : pH = 6,7 soit $[H^+] = 10^{-6,7} \text{ mol.L}^{-1}$.

Et l'égalité de quantité de l'élément chrome de part et d'autre donne : $2[Cr_2O_7^{2-}] = [CrO_4^{2-}]$.

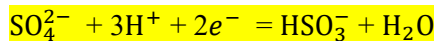
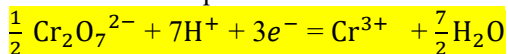
Du fait que la concentration totale en élément chrome dissous est limitée à $c_{tra} = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$, on a, sur la frontière, $2[Cr_2O_7^{2-}] + [CrO_4^{2-}] = 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$

D'où $[Cr_2O_7^{2-}] = 0,025 \text{ mol.L}^{-1}$ et $[CrO_4^{2-}] = 0,05 \text{ mol.L}^{-1}$.

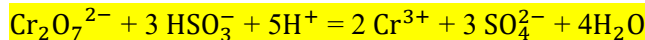
$$K_1 = \frac{(5 \cdot 10^{-2})^2 * (10^{-6,7})^2}{25 \cdot 10^{-3}} = \frac{(25 \cdot 10^{-4}) * (10^{-6,7})^2}{25 \cdot 10^{-3}} = 10^{-14,4}$$

$$\boxed{pK_1 = 14,4}.$$

Q4. Pour trouver et équilibrer la réaction rédox globale, la meilleure méthode consiste à chercher, pour commencer, les deux demi-équations rédox :



Puis on fait une combinaison linéaire des deux $\frac{1}{2}$ réactions de manière à éliminer les e^- :



A l'équilibre :

$$E^\circ(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) + \frac{0,06}{3} \log \frac{[Cr_2O_7^{2-}][H^+]^7}{[Cr^{3+}]^2 c_{ref}^{6,5}} = E^\circ(SO_4^{2-}/HSO_3^-) + \frac{0,06}{2} \log \frac{[SO_4^{2-}][H^+]^3}{[HSO_3^-] c_{ref}^3}$$

$$E^\circ(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) + \frac{0,06}{6} \log \frac{[Cr_2O_7^{2-}][H^+]^{14}}{[Cr^{3+}]^2} = E^\circ(SO_4^{2-}/HSO_3^-) + \frac{0,06}{6} \log \frac{[SO_4^{2-}]^3 [H^+]^9}{[HSO_3^-]^3}$$

$$E^\circ(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) - E^\circ(SO_4^{2-}/HSO_3^-) = 0,01 \log(K_2)$$

$$\log(K_2) = \frac{E^\circ(Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}) - E^\circ(SO_4^{2-}/HSO_3^-)}{0,01}$$

$$\log(K_2) = \frac{1,33 - 0,17}{0,01} = 116$$

$$K_2 = 10^{116} \gg \gg 1. \text{ La réaction est quasi-totale.}$$

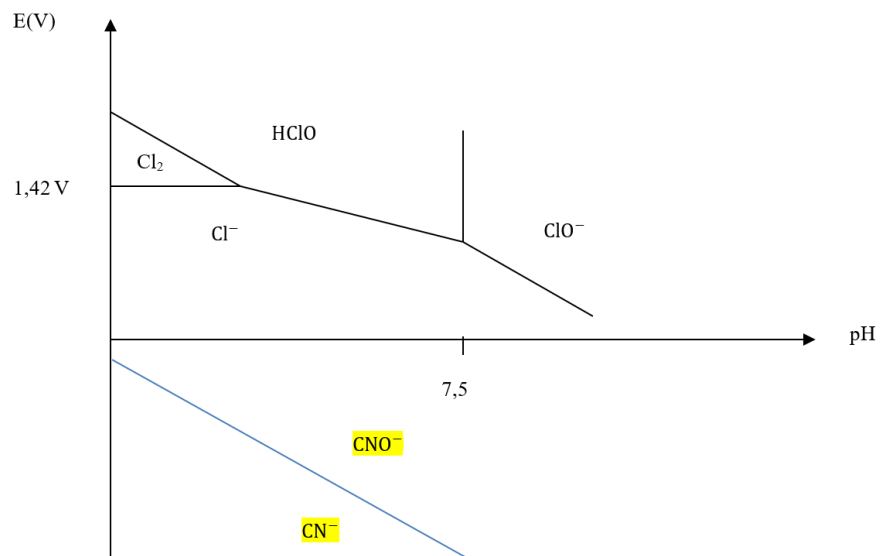
Q5. Il nous faut superposer le diagramme E-pH du chlore et celui du cyanure.

Ce dernier est très simple : la demi-réaction rédox est : $CNO^- + 2e^- + 2H^+ = CN^- + H_2O$.

Le potentiel de Nernst associé est $E = E^0 + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[CNO^-][H^+]^2}{[CN^-]} \right)$. Et sur la frontière, $[CNO^-] = [CN^-]$, donc

$$E = E^0 - 0,06 \text{ pH} \\ = -0,13 - 0,06 \text{ pH}.$$

Les domaines de prédominance de CN^- et ClO^- sont disjoints, donc ClO^- (bon oxydant car placé au-dessus d'une droite située haut) oxyde CN^- (bon réducteur car au-dessous d'une droite située bas) de façon quasi-totale suivant la réaction : $CN^- + ClO^- = CNO^- + Cl^-$ (règle du gamma très favorable).



Q6. Point de vue thermodynamique :

En acidifiant, ClO^- se transforme pour commencer, en $HClO$.

Puis, lorsque le pH devient faible

(inférieur à environ 2, cf diagramme E-pH), les domaines de prédominance de $HClO$ et Cl^- sont disjoints. Il y a médianité de $HClO$ et Cl^- en Cl_2 .



Qui provient de $\text{HClO} + \text{e}^- + \text{H}^+ = \frac{1}{2}\text{Cl}_2 + \text{H}_2\text{O}$ et $\frac{1}{2}\text{Cl}_2 + \text{e}^- = \text{Cl}^-$

Cl_2 est très toxique, il ne faut pas acidifier une solution d'eau de Javel.

Pb n°4 : Physique : Ondes sonores

A1a) On applique le principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide dans le référentiel terrestre, supposé

galiléen : $\rho S dx \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P S dx$, d'où $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P$ (E1)

A1b) Equation locale de conservation de la masse : $\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (E2)

A1c) $\chi = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_S$, ou encore $\chi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S$ (E3)

A2a) Approx. acoustique : $|p/P_0|$, $|\mu/\rho|$, $|v/c_0|$ sont des **infinitésimaux du 1^{er} ordre**.

A2b) (E1), (E2) et (E3) deviennent (cf cours) : $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ (E4) $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ (E5) $\mu = \rho_0 \chi p$ (E6)

A3a) On combine ces 3 équations et on trouve $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho_0 \chi \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$.

A3b) $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$ $c_0 = 0,33 \text{ km.s}^{-1}$ puisque $7 \times 1,3 \simeq 9$

A3c) Modèle du gaz parfait : $P \rho^{-\gamma} = Cte$, d'où $\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$ et $\chi = \frac{1}{\gamma P_0}$ $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$.

B1a) L'OPPS a une structure **longitudinale**. On le démontre en prenant les notations complexes, et $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\text{grad} P$ conduit à $\rho j \omega \vec{v} = j k \vec{p}$. On a bien montré que \vec{v} est colinéaire à \vec{k} , donc sa partie réelle l'est aussi.

B1b) Exemples d'ondes planes **longitudinales** : onde longitudinale dans un **ressort massique**, onde de **courant dans une ligne électrique** bifilaire

Exemples d'ondes planes **transversales** : onde de déplacement dans une **corde de guitare**, champ \vec{E} ou \vec{B} d'une onde électromagnétique dans le vide, ou **onde de tension dans une ligne bifilaire**.

B2a) L'onde se propage dans le sens des **x croissants**. En effet si la phase $\omega t - kx$ prend une certaine valeur φ_0 en x_1 à t_1 , elle reprend la même valeur à $t_2 > t_1$ en x_2 tel que $\omega t_2 - kx_2 = \omega t_1 - kx_1$, donc tel que $x_2 = x_1 + \frac{\omega(t_2 - t_1)}{k}$, donc $x_2 > x_1$.

B2b) L'équation de d'Alembert donne : $(-jk)^2 \underline{p} - \frac{(j\omega)^2}{c_0^2} \underline{p} = 0$, d'où la « relation de dispersion » $k^2 c_0^2 = \omega^2$.

B2c) (E5) et (E6) donnent $j k \underline{v} = \chi j \omega \underline{p}$, d'où $\underline{v} = \rho_0 c_0 \underline{v}$. La surpression et la vitesse sont **en phase** (pour l'onde se propageant dans le sens des x croissants).

B3a) Le vecteur \vec{R} se nomme **vecteur densité de flux de puissance sonore** (ou vecteur densité de courant énergétique, ou de Poynting sonore).

B3b) $RS = Fv = pSv$, d'où $R = pv$, puis $\langle R \rangle = \langle \rho_0 c_0 v^2 \rangle = \left\langle \frac{p^2}{\rho_0 c_0} \right\rangle$, donc $\langle R \rangle = \frac{p_0^2}{(2\rho_0 c_0)}$.

B3c) Intensité acoustique : $I = \langle |\vec{R}| \rangle$. $I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_{min}} \right)$, avec $I_{min} = 1.10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$.

On utilise **10log** pour les grandeurs énergétiques (quadratiques), et **20log** pour les grandeurs de base, donc non quadratiques (tension, courant, vitesse, surpression). On fait cela pour **trouver le même nombre de dB**, que l'on s'intéresse aux grandeurs de base ou aux grandeurs quadratiques.

B3d) Si l'amplitude de la surpression acoustique de l'OSPPS est multipliée par 2, l'amplitude de la vitesse est multipliée **par 2 aussi** (puisque $v = \frac{p}{\rho_0 c_0}$).

Et **l'intensité acoustique est multipliée par $2^2 = 4$** .

B3e) Si l'amplitude de la surpression acoustique de l'OSPPS est multipliée par 100, alors l'intensité en dB subit un **accroissement de 40 dB**. En effet, $\frac{I_2}{I_1} = 10^4$ puis $10 \log(10^4) = 40$.