Chapitre 13

Fonctions vectorielles de la variable réelle

Dans ce chapitre I désigne un intervalle d'intérieur non vide, a un point de I et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
On s'intéresse aux fonctions définies de I dans E.

I Dérivation

I. A Dérivée en un point

Définition 1.1

On appelle **taux d'accroissement en a** l'application :

$$\begin{array}{rcccl} \tau_a(f) & : & I \setminus \{a\} & \longrightarrow & E \\ & & t & \longmapsto & \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \end{array}$$

L'application f est dite **dérivable en a** lorsque son taux d'accroissement en a admet une limite dans E quand t tend vers a. Dans ce cas cette limite est appelée **dérivée de f en a** et elle est notée $f'(a)$.

Remarque 1.2 : La fonction taux d'accroissement étant à valeurs dans un espace vectoriel normé, une limite éventuelle est nécessairement finie.

Théorème 1.3

La fonction f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si il existe $\ell \in E$ et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow E$ telle que :

$$\forall t \in I, f(t) = f(a) + (t-a)\ell + (t-a)\varepsilon(t), \text{ avec } \varepsilon(t) \xrightarrow[t \to a]{} 0_E,$$

et dans ce cas $\ell = f'(a)$.

Interprétation cinématique : Si f désigne la position d'un point en fonction du temps, le vecteur $f'(a)$ représente la vitesse instantanée du point à l'instant a.

Proposition 1.4

Si la fonction f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Notation : Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on appelle **fonctions coordonnées** de $f : I \longrightarrow E$ dans la base $\mathcal{B}$ les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies de I dans $\mathbb{K}$ telles que :

$$\forall t \in I, f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t) e_k.$$

Rappel : Une fonction $f : I \longrightarrow E$ est continue en $a \in I$ si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées est continue en a.

Proposition 1.5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f : I \longrightarrow E$.
La fonction f est dérivable en a si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est dérivable en a.
Dans ce cas, si l'on note f_k ces fonctions coordonnées :

$$f'(a) = \sum_{k=1}^{n} f'_k(a) e_k.$$

Remarques 1.6 :

- On retrouve ainsi que $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en a si et seulement si les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont : ce sont les fonctions coordonnées de f dans la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- En particulier pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ avec $f = (f_1, \ldots, f_n)$, f est dérivable en a si et seulement si $\forall k \in [\![1\,;n]\!], f_k$ est dérivable en a et dans ce cas, $f'(a) = \big(f'_1(a), \ldots, f'_n(a)\big)$.

Définition 1.7

- Si a n'est pas l'extrémité droite de I, f est dite **dérivable à droite** en a lorsque la restriction de f à $I \cap [a\,;+\infty[$ est dérivable en a.
  Dans ce cas on appelle **dérivée à droite** en a : $\big(f_{|I\cap[a\,;+\infty[}\big)'(a)$, notée $f'_d(a)$.
- Si a n'est pas l'extrémité gauche de I, f est dite **dérivable à gauche** en a lorsque la restriction de f à $I \cap]-\infty\,;a]$ est dérivable en a.
  Dans ce cas on appelle **dérivée à gauche** en a : $\big(f_{|I\cap]-\infty\,;a]}\big)'(a)$, notée $f'_g(a)$.

Proposition 1.8

Soit a un point intérieur de I et $f : I \longrightarrow E$.
La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$; et dans ce cas $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

I. B Fonction dérivée

Définition 1.9

Une fonction $f : I \longrightarrow E$ est dite **dérivable** sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I.
On appelle **dérivée de f** et on note f' la fonction $t \mapsto f'(t)$.

Proposition 1.10

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. La fonction $f : I \longrightarrow E$ est dérivable sur I si et seulement si ses fonctions coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont dérivables sur I.
Dans ce cas, les fonctions coordonnées de f' sont les dérivées des fonctions coordonnées de f.

Théorème 1.11

Une fonction $f : I \longrightarrow E$ est constante sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable sur I et que sa dérivée est nulle sur I.

I. C Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 1.12

Soit $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow E$ deux fonctions dérivables en $a \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

Proposition 1.13

Soit $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow E$ deux fonctions dérivables sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

Remarque 1.14 : L'ensemble $\mathcal{D}(I, E)$ des fonctions dérivables sur I à valeurs dans E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$ et $f \mapsto f'$ est une application linéaire de $\mathcal{D}(I, E)$ dans $\mathcal{F}(I, E)$.

Proposition 1.15

Soit L une application linéaire de E dans un espace vectoriel F de dimension finie.
Si f est dérivable en $a \in I$, alors $L \circ f$ est dérivable en a et :

$$(L \circ f)'(a) = L\big(f'(a)\big).$$

Proposition 1.16

Soit L une application linéaire de E dans un espace vectoriel F de dimension finie.
Si f est dérivable sur I, alors $L \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Notation : La fonction $L \circ f$ est notée $L(f)$ et de même si $M : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$ est multilinéaire, on note :

$$M(f_1, \ldots, f_p) \;:\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & M\big(f_1(t), \ldots, f_p(t)\big). \end{array}$$

Proposition 1.17

Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
Si $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ sont dérivables en $a \in I$, alors $B(f, g)$ est dérivable en a et :

$$B(f, g)'(a) = B\big(f'(a), g(a)\big) + B\big(f(a), g'(a)\big).$$

Proposition 1.18

Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
Si $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ sont dérivables sur I, alors $B(f, g)$ est dérivable sur I et :

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

Exemples 1.19 :
- Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \longrightarrow E$ dérivables sur I, alors $\varphi \cdot g$ est dérivable sur I et $(\varphi g)' = \varphi' g + \varphi g'$.
- Soit f et g dérivables de I dans un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, montrer que : $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ est dérivable sur I.
- Soit f dérivable de I dans un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Montrer que si $\|f\|$ est constante sur I, alors pour tout $t \in I, f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

Proposition 1.20

Soit $E_1, \ldots, E_p$ et F des espaces vectoriels de dimension finie ($p \geqslant 1$) et M une application multilinéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F.
Si $f_1, \ldots, f_p$ sont des fonctions de I dans $E_1, \ldots, E_p$ respectivement, dérivables en $a \in I$, alors $M(f_1, \ldots, f_p)$ est dérivable en a et :

$$M(f_1, \ldots, f_p)'(a) = M(f_1', f_2, \ldots, f_p)(a) + M(f_1, f_2', \ldots, f_p)(a) + \cdots + M(f_1, f_2, \ldots, f_p')(a).$$

Remarque 1.21 : De même pour la dérivabilité sur un intervalle.

Exemple 1.22 : Si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions dérivables de I à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)$ est dérivable sur I et

$$\Big(\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)\Big)' = \det_{\mathcal{B}}(f_1', f_2, \dots, f_n) + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2', \dots, f_n) + \cdots + \det_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, \dots, f_n').$$

Si A est une fonction dérivable de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A)$ est dérivable sur I et en notant $C_1, \dots, C_n$ les fonctions colonnes de A :

$$\big(\det \circ A\big)' = \det(C_1', C_2, \dots, C_n) + \det(C_1, C_2', \dots, C_n) + \cdots + \det(C_1, C_2, \dots, C_n').$$

Proposition 1.23

Soit I et J des intervalles, $f : I \longrightarrow E$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\varphi(J) \subset I$.
Si φ est dérivable en $a \in J$ et f est dérivable en $b = \varphi(a)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et :

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) f'\big(\varphi(a)\big).$$

Proposition 1.24

Soit I et J des intervalles, $f : I \longrightarrow E$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$.
Si :

1. φ est dérivable sur J,
2. f est dérivable sur I,
3. $\varphi(J) \subset I$;

alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et :

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi).$$

I. D Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 1.25

Une fonction $f : I \longrightarrow E$ est dite 1 fois dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et la dérivée d'ordre 1 de f est $f^{(1)} = f'$, puis par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$, on dit que $f : I \longrightarrow E$ est ***k* fois dérivable** sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa dérivée est $k-1$ fois dérivable sur I. Dans ce cas on appelle **dérivée d'ordre *k*** et on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre $k-1$ de f'.

Remarque 1.26 : Toute fonction $f : I \longrightarrow E$ est 0 fois dérivable sur I et $f^{(0)} = f$.

Définition 1.27

Soit $f : I \longrightarrow E$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction f est dite **de classe $\mathcal{C}^k$ sur *I*** lorsque f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I.
- La fonction f est dite **de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur *I*** lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Notation : Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans E.

Dans la suite de cette partie, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Proposition 1.28

Soit $f, g \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et si $k \in \mathbb{N}$:

$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$

Proposition 1.29

Soit L une application linéaire de E dans un espace vectoriel F de dimension finie.
Si $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$, alors $L \circ f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et si $k \in \mathbb{N}$:

$$(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}.$$

Proposition 1.30

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f : I \longrightarrow E$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
Dans ce cas, si l'on note f_i ces fonctions coordonnées :

$$f^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)} e_i.$$

Proposition 1.31 (Formule de Leibniz)

Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie et B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G.
Si $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors $B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et :

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B(f^{(j)}, g^{(k-j)}).$$

Proposition 1.32

Soit $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels de dimension finie ($p \geqslant 1$) et M une application multilinéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F.
Si $f_1, \dots, f_p$ sont des fonctions de I dans $E_1, \dots, E_p$ respectivement, de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors $M(f_1, \dots, f_p)$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Proposition 1.33

Soit I et J deux intervalles, et deux fonctions $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R})$ telles que $\varphi(J) \subset I$.
Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J à valeurs dans E.

II Intégration sur un segment

Dans cette section, les fonctions sont définies sur un segment $[a\,;b]$ (avec $a < b$) et à valeurs dans E.

II. A Fonctions continues par morceaux

Définition 2.1

Une fonction $f : [a\,;b] \longrightarrow E$ est dite **continue par morceaux** sur $[a\,;b]$ lorsqu'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_p)$ de $[a\,;b]$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;p-1]\!]$, $f_{|]a_i\,;a_{i+1}[}$ est prolongeable en une fonction continue sur $[a_i\,;a_{i+1}]$.
Une telle subdivision est dite **adaptée** à f.

Remarque 2.2 : Une fonction est continue par morceaux si et seulement si il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_p)$ de $[a\,;b]$ telle que :

- pour tout $i \in [\![0\,;p-1]\!]$, f est continue sur $]a_i\,;a_{i+1}[$;
- pour tout $i \in [\![1\,;p-1]\!]$, f a des limites (finies) à gauche et à droite en a_i ;
- f a une limite (finie) à droite en $a = a_0$ et à gauche en $b = a_p$.

Notation L101 : on note $\mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b]$ à valeurs dans E.

Exemples 2.3 :
- Les fonctions continues sur $[a\,;b]$ sont continues par morceaux sur $[a\,;b]$;
- les fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ sont continues par morceaux sur $[a\,;b]$;

Proposition 2.4

Une fonction $f : [a\,;b] \longrightarrow E$ est continue par morceaux sur $[a\,;b]$ si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées est continue par morceaux sur $[a\,;b]$.

Proposition 2.5

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$, alors f est bornée sur $[a\,;b]$.

Proposition 2.6

L'ensemble $\mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a\,;b], E)$.
L'application $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in [a\,;b]} \|f(t)\|$ définit une norme sur $\mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$.

II. B Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition/Proposition 2.7

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note $f_1, \dots, f_n$ les fonction coordonnées de f dans $\mathcal{B}$.
Alors le vecteur

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) \cdot e_i$$

ne dépend pas de la base de E choisie. On l'appelle **l'intégrale de f sur $[a\,;b]$**.

Notation : L'intégrale de f sur $[a\,;b]$ est notée : $\int_{[a\,;b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On étend les notations $\int_a^b f$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour un couple $(a, b) \in I^2$ avec f continue par morceaux sur I par :

$$\int_a^a f = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f = -\int_b^a f \text{ si } a > b.$$

II. C Propriétés

Proposition 2.8 (Linéarité)

L'application $f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire de $\mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$ dans E :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 2.9 (Relation de Chasles)

Soit $f : I \longrightarrow E$ continue par morceaux sur I et $a, b, c \in I$, alors :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 2.10

Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$ avec F un espace vectoriel de dimension finie, alors $L(f) \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b], F)$ et :

$$L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L(f).$$

Définition 2.11

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **somme de Riemann d'ordre n associée à f** le vecteur :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Théorème 2.12

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$, alors :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

Méthode 2.13

On peut toujours se ramener au cas particulier $[a\,;b] = [0\,;1]$ qui est plus simple à mettre en oeuvre :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il suffit alors de :

- faire apparaître $\frac{1}{n}$ en tête ;
- se ramener à une somme de 0 à $n-1$;
- faire apparaître les $\frac{k}{n}$;
- en déduire la fonction f associée.

Exemples 2.14 : Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Proposition 2.15 (Inégalité triangulaire)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$ (avec $a < b$), alors :

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|.$$

Corollaire 2.16

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b], E)$, alors :

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty.$$

II. D Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème 2.17

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $a \in I$. Alors l'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Remarques 2.18 :

- F est la primitive de f qui s'annule en a.
- Si g est une primitive de f sur I et $a, b \in I$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = g(b) - g(a).$$

- Si $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ et $a, x \in I$, alors :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode 2.19

Pour étudier une fonction du type : $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, définie par une intégrale dont seules les bornes (et non l'intégrande) dépendent de la variable, on introduit une primitive de l'intégrande.

Exemple 2.20 : On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \int_{x-1}^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et calculer f'.

Proposition 2.21 (Changement de variable)

Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ telles que $\varphi(J) \subset I$. Pour tous $a, b \in J$:

$$\int_a^b \varphi'(s) f\big(\varphi(s)\big)\,\mathrm{d}s = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 2.22 (Inégalité des accroissements finis)

Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de I et $M \in \mathbb{R}^+$.
Si : $\forall t \in \mathring{I}, \|f'(t)\| \leqslant M$, alors :

$$\forall a, b \in I, \|f(b) - f(a)\| \leqslant M\,|b-a|\,.$$

Attention : L'égalité des accroissements finis, valable pour $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, ne se généralise pas aux fonctions à valeurs complexes ou vectorielles.

Contre exemple 2.23 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$.

III Formules de Taylor

Théorème 3.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I,E)$ et $a, b \in I$, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.2 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

- Soit $f \in \mathcal{C}^{p+1}(I,E)$ et $a, b \in I$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_p$$

avec $\|R_p\| \leqslant \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!} M_{p+1}$ où M_{p+1} est un majorant de $\left\|f^{(p+1)}\right\|$ sur $[a\,;b]$ (ou sur $[b\,;a]$).

- Soit $f \in \mathcal{C}^{p}(I,E)$ et $a, b \in I$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_p$$

avec $\|R_p\| \leqslant \frac{|b-a|^{p}}{(p)!} K_p$ où K_p est un majorant de $\left\|f^{(p)} - f^{(p)}(a)\right\|$ sur $[a\,;b]$ (ou sur $[b\,;a]$).

Remarque 3.3 : $\left\|f^{(p+1)}\right\|$ est continue sur le segment $[a\,;b]$ (ou $[b\,;a]$) donc majorée.

Théorème 3.4 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f \in \mathcal{C}^p(I,E)$ et $a \in I$, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^p\right).$$

Remarques 3.5 :

- La conclusion du théorème peut se traduit par : il existe une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow E$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0_E$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^p \cdot \varepsilon(x).$$

- Pour $p \geqslant 1$, le résultat reste vrai sous l'hypothèse (plus faible) : f est p fois dérivable sur I.

Méthode 3.6

- La formule de Taylor-Young décrit le comportement local de la fonction f autour de a. Elle peut servir dans un calcul de limite en a.
- Les formules de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont des résultats globaux : valables pour tout $b \in I$.

IV Intégration et dérivation d'une suite ou série de fonctions

IV. A Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Théorème 4.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E, a un point de I.
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I ;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f.

Alors la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur tout segment de I où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 4.2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un segment $[a\,;b]$.
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a\,;b]$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers une fonction f.

Alors f est continue sur $[a\,;b]$ et :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Attention : La convergence simple ne suffit pas !

IV. B Dérivation d'une suite de fonctions

Théorème 4.3

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;
- $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur tout segment de I ;

alors :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Remarque 4.4 : En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sur des intervalles adaptés à la situation.

Attention : La convergence uniforme doit être celle des dérivées !

IV. C Intégration et dérivation d'une série de fonctions

Proposition 4.5

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E, a un point de I.
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I ;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction S.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on pose :

$$F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } T : x \mapsto \int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors la suite $\sum F_n$ converge uniformément vers T sur tout segment de I.

Proposition 4.6

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions sur un segment $[a\,;b]$ et à valeurs dans E.
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a\,;b]$;
- $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction S sur $[a\,;b]$,

alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Proposition 4.7

Soit $\sum f_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$;
- $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I ;

alors :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Exemple 4.8 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & & t & \longmapsto & \exp(t \cdot A) \end{array}$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = A \times \exp(t\dot{A}) = \exp(t \cdot A) \times A$.

Remarque 4.9 : De même pour la généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$.

V Fonctions à valeurs réelles (rappels)

V. A Dérivabilité et extremum

Théorème 5.1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, si

- x_0 est un point intérieur de I (pas une extrémité) ;
- f est dérivable en x_0 ;
- f admet un extremum local en x_0 ;

alors $f'(x_0) = 0$.

Attention : 1. La réciproque est fausse :

$$f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow f \text{ a un extremum local en } x_0.$$

Contre exemple : la fonction ______________.

2. Le théorème ne s'applique pas aux extrémités des I.

Méthode 5.2

Pour chercher les extrema d'une fonction f dérivable sur I, il faut s'assurer que ces extrema existent (ce qui est le cas par exemple si I est un segment) ; puis on considère les points d'annulation de la dérivée <u>et les extrémités</u>.

V. B Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis

Théorème 5.3 (de Rolle)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.
Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique : sous les hypothèses du théorème, le graphe de f a au moins une tangente horizontale.
Interprétation cinématique : si l'on se déplace sur une route rectiligne et que l'on revient à son point de départ, alors il y a un moment où la vitesse est nulle.

Théorème 5.4 (Égalité des accroissements finis)

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.
Alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Interprétation géométrique : sous les hypothèses du théorème, le graphe de f a au moins une tangente parallèle à la corde reliant les points du graphe d'abscisses a et b.
Interprétation cinématique : si l'on se déplace sur une route rectiligne, alors il y a un moment où la vitesse est égale à la vitesse moyenne. Par exemple, si l'on parcours 5 km en une heure, alors à un instant donné la vitesse est égale à 5 km/h.

V. C Théorème de la limite de la dérivée

Lemme 5.5

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \neq a}]{} \ell$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Théorème 5.6

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, si :

- f est continue sur I,
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$,
- $f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \neq a}]{} \ell \in \mathbb{R}$,

alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Théorème 5.7

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, si :

- f est continue sur I,
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$,
- $f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \neq a}]{} \pm\infty$,

alors f n'est pas dérivable en a et le graphe de f a une tangente verticale en a.

Exemple 5.8 : Étudier la dérivabilité de $x \mapsto x\sqrt{x}$.

Théorème 5.9

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, si :

- f est continue sur I,
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$,
- $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$,

alors ....

Exemple 5.10 : Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(1+x)}{x} \end{array} \right.$ est prolongeable par continuité en 0, on note encore f le prolongement sur $[0\,;+\infty[$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.

Théorème 5.11

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, si :

- f est continue sur I,
- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$,
- $\forall j \in [\![1\,;k]\!], f^{(j)}(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell_j \in \mathbb{R}$,

alors ....

Exemple 5.12 : Montrer que la fonction f de l'exemple précédent est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0\,;+\infty[$.