Exercices

Exercice 1. Pour tout réel x, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & (0) \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que D_n est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Exercice 2. Soit u, v, w trois fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose :

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 3. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow E$ dérivable en 0 tel que $f(0) = 0$.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 4. Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow [0\,;1]$.
1. Montrer que si f est continue sur $[0\,;1]$, alors f admet un point fixe.
2. Montrer que si f est croissante sur $[0\,;1]$, alors f admet un point fixe.
   Indication : on pourra introduire l'ensemble $X = \{x \in [0\,;1] \mid f(x) \geqslant x\}$.

Exercice 5. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur I (I intervalle de $\mathbb{R}$).
Montrer que f est strictement monotone.

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0\,;+\infty[, \mathbb{R})$ telle qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $]0\,;+\infty[$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = 0$.
Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0$.

Exercice 7. Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 \in [0\,;2]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

Exercice 8. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(2u_n)$.
1. Montrer que l'intervalle $[\frac{\pi}{4}\,;1]$ est stable par $f : t \mapsto \sin(2t)$.
   On pourra utiliser $0,78 < \frac{\pi}{4} < 0,79$ et $0,9 < \sin 2 < 0,91$ et $2\cos(2) < 1$.
2. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction

$$f_n : x \mapsto x^3 + nx - 1.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution. On appelle u_n cette unique solution et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie implicitement.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \in \,]0; 1]$.
3. Montrer que $f_n(u_{n+1}) < 0$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Déterminer la valeur de la limite.
   indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 10. Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a\,;b]$.
1. Montrer que f peut admettre un minimum sur $[a\,;b]$ en a sans qu'on ait $f'(a) = 0$.
2. Montrer que si f admet un minimum sur $[a\,;b]$ en a, alors $f'(a) \geqslant 0$.
3. On suppose $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ a au moins une solution dans $[a\,;b]$.

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a\,;+\infty[, E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie.
On suppose que f' a une limite en $+\infty$.
Montrer que f est lipschitizienne sur $[a\,;+\infty[$.

Exercice 12. Soit $f, g \in \mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ avec $g \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$.
Montrer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \neq 0$ et

$$(1) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1. Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le nombre $K = \int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t$ soit non nul, puis que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2K} \int_{x-c}^{x+c} f(u)\,\mathrm{d}u.$$
3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f'' = \lambda f$.
   Indication : on pourra dériver deux fois la relation (1) par rapport à x puis par rapport à y.
5. En déduire les solutions de l'équation (1).

Exercice 14. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n^4 + n^2 k^2}} \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{2n^2 + k^2} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

CCINP

Exercice 15 (CCINP 3).

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 16 (CCINP 4).

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \,]a, b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.