Polynômes - intégrales et equations différentielles- suites - matrices
DS5 - durée : 3h

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : échauffement polynomiale

Soit $P = X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 1$.

1. Déterminez l'ordre de multiplicité de la racine -1 pour P.
2. Déterminer la décomposition primaire de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

1. On trouve que -1 est racine d'ordre de multiplicité 3, par exemple en dérivant 3 fois.
2. On factorise et il vient
$$P(X) = (X+1)^3(X^2 - X + 1)$$
Le polynôme de degré 2 n'a pas de racine réelle, donc la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est terminée.
Dans $\mathbb{C}[X]$ on obtient $\boxed{P(X) = (X+1)^3(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3}).}$

Exercice 2 : échauffement séquentiel

Donnez l'expression en fonction de n du terme général des suites (u_n) ci dessous.

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$
2. $u_0 = 3$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -\frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{2}$

1. C'est une suite arithmético-géométrique. On cherche $c = \frac{1}{2}c - 2$, c'est à dire $c = -4$.
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - c = \frac{1}{2}u_n - 2 - \frac{1}{2}c + 2$, c'est à dire
$$u_{n+1} - c = \frac{1}{2}(u_n - c)$$
La suite $(u_n - c)$ est donc géométrique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - c = (u_0 - c)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. On en déduit $\boxed{u_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4}$
2. C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$.
-1 est racine évidente, l'autre racine est $\frac{1}{2}$ et par conséquent il existe A, B réels tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A.(-1)^n + B\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
Comme $u_0 = 3$ et $u_1 = 0$ on déduit le système
$$\left\{\begin{array}{ll} A + B &= 3 \\ -A + \frac{1}{2}B &= 0 \end{array}\right. \underset{L2 \leftarrow L1+L2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ll} A + B &= 3 \\ \frac{3}{2}B &= 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} A &= 1 \\ B &= 2 \end{array}\right.$$
On en déduit $\boxed{u_n = (-1)^n + \frac{1}{2^{n-1}}}$.

Exercice 3 : changement de variable et équation différentielle

Soit a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $a(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$.

1. Avec un changement de variable, calculer une primitive de a.
2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $\mathbb{R}$:

$$(E) : \qquad (e^x + e^{-x})y' - e^x y = e^x$$

1. Posons $A(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dt$. Ainsi, a est une primitive de a (celle qui s'annule en 0)
   Effectuons le changement de variable $u = e^x$. Alors $du = e^x dx$.
   Les bornes deviennent alors $e^0 = 1$ et e^x et on obtient :

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^{e^x} \frac{1}{u + \frac{1}{u}} du \\ &= \int_0^{e^x} \frac{u}{1+u^2} du \\ &= [\frac{1}{2}\ln(1+u^2)]_0^{e^x} \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) \end{aligned}$$

2. On commence par réécrire l'équation sous la forme

$$y' - \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} y = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$$

   On reconnait devant le y la fonction a étudiée précédemment.
   L'équation homogène est

$$E_h : y' - a(x)y = 0$$

   dont les solutions sont

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})} = \lambda\sqrt{1+e^{2x}}$$

   On cherche maintenant une solution particulière, mais avant de vouloir faire des variations de la constante, on regarde si il n'y en a pas une solution évidente... et effectivement $y_p = -1$ convient. Ouf ! (mais la variation de la constante restait possible)

$$(E) : \exists \lambda \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda\sqrt{1+e^x} - 1$$

Exercice 4 : des suites et des matrices

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. a) Montrer que A est inversible et calculez A^{-1}.
   b) Montrer qu'il existe un réel a tel que $AH = aH$.
   c) Montrer qu'il existe un réel b tel que $A = I + bH$.

2. a) Montrez qu'il existe une suite (b_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = I + b_n H$.
   On précisera la relation de récurrence entre b_{n+1} et b_n.
   b) En déduire que : $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix}$
   c) Calculer b_n en fonction de n et exprimer la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix}$ en fonction de n.

3. On considère maintenant les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 6 - 5u_n + 6v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2 - 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.
   c) Calculer finalement u_n et v_n en fonction de n.

1. a) La méthode de Gauss-Jordan donne assez rapidement :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}}$$

   b) on calcule :

$$AH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & -9 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ainsi $\boxed{AH = -3H, \text{ c'est à dire } AH = aH, \text{ avec } a = -3}$

c) A nouveau on calcule :

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2H$$

On a $\boxed{A = I + 2H}$, qui est bien de la forme $A = I + bH$, avec $b = 2$

2. a) **Analyse :** Si une telle suite existe, on a $A^n = I + b_n H$. Comme $A^0 = I$, nécessairement $b_0 = 0$.
De plus, $A^{n+1} = AA^n = AI + b_n AH = A + b_n(-3H)$ d'après la question 1b.
D'après 1c, $A = I + 2H$ d'où $A^{n+1} = I + (2 - 3b_n)H$ et donc il faut $b_{n+1} = 2 - 3b_n$.
Synthèse : Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 2 - 3b_n$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence que $A^n = I + b_n H$
Initialisation :
On a $b_0 = 0$, donc $I + b_0 H = I$. Or $A^0 = I$, donc **l'initialisation est vérifiée**.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = I + b_n H$.
On a alors, en multipliant par A à gauche,

$$A \times A^n = A(I + b_n H) = AI + b_n AH$$

Or $AI = A = I + 2H$ et $AH = -3H$, donc

$$A^{n+1} = A + b_n AH = (I + 2H) - 3b_n H = I + (2 - 3b_n)H$$

Par définition de la suite (b_n), on a $2 - 3b_n = b_{n+1}$, ce qui donne :

$$A^{n+1} = I + b_{n+1}H$$

ce qui prouve l'hérédité.
Conclusion : On a prouvé, par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = I + b_n H}$$

b) On applique le résultat précédent au calcul proposé :

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (I + b_n H) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b_n H \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Or, $H \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix}}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = -3b_n + 2$, donc la suite (b_n) est arithmético-géométrique.
On cherche c tel que $c = -3c + 2$, c'est à dire $c = 1/2$.
On a donc 2 égalités : (1) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = -3b_n + 2$ et (2) : $c = -3c + 2$.
En les soustrayant on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - c = -3(b_n - c)$,
Donc la suite $(b_n - c)$ est géométrique de raisons -3, d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - c = (b_0 - c) \times (-3)^n$.
En calculant $b_0 - c = -\frac{1}{2}$, on obtient :
Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-3)^n}$$

En reportant dans le vecteur colonne précédent, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{9}{2} - \dfrac{3}{2}(-3)^n \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}(-3)^n \end{pmatrix}}$$

3. a) Pour tout entier n, on a d'une part :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 - 5u_n + 6v_n \\ 2 - 2u_n + 3v_n \end{pmatrix}$$

et d'autre part, étant donné la définition des suites $\left(X_n\right)$, $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 - 5u_n + 6v_n \\ 2 - 2u_n + 3v_n \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n}$

b) On l'a fait déjà plusieurs fois par récurrence (et il fallait le refaire encore). Attention : on ne peut pas dire "c'est une suite géométrique de raison A" car A n'est pas un réel ou un complexe....

c) En utilisant les questions précédentes on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} = X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{9}{2} - \dfrac{3}{2}(-3)^n \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}(-3)^n \end{pmatrix}$$

et finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}(-3)^n \ \text{ et } \ v_n = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(-3)^n}$

Exercice 5 : une application qui transforme des polynômes

On rappelle que $\mathbb{C}_3[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré au plus 3.
Pour tout $P \in \mathbb{C}_3[X]$, on définit l'application φ par :

$$\varphi(P(X)) = P(X+1) - P(X)$$

où $P(X+1)$ désigne la composition de $X+1$ par P (et non pas le produit)

1. (Exemple pour comprendre) Vérifiez que $\varphi(X) = 1$ et $\varphi(X^2) = 2X + 1$.
2. Montrez que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{C}_3[X]$.
3. Soit P tel que $\varphi(P) = 0$:
   a) Montrez que si P admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\alpha + 1$ est racine de P aussi.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est racine aussi. Que dire finalement de P ?
   c) Conclure sur l'ensemble des polynômes vérifiant $\varphi(P) = 0$.
4. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
   a) Soient α, β, γ et δ tel que
   $$\varphi(P) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$$
   Exprimez α, β, γ et δ en fonction de a,b, c et d.
   b) En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que
   $$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$
   c) Calculez A^4. En déduire $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(P))))$ en fonction de a, b, c et d.

1. C'est une vérification.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et $Q = \varphi(P)$. Par composition et somme de polynômes, Q est un polynôme. De plus, $P(X+1)$ est de degré $deg(P) \times 1$ et par somme, $deg(Q) \leq deg(P) \leq 3$, donc $\boxed{Q = \varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]}$.
3. a) Supposons $\varphi(P) = 0$. Alors $P(X+1) = P(X)$. Supposons α racine de P. Alors $P(\alpha+1) = P(\alpha) = 0$, donc $\boxed{\alpha + 1 \text{ est racine de } P}$

b) Par récurrence : Si $n = 1$, c'est la question a).
Soit $n \geq 1$ et supposons que $\alpha + n$ est racine. D'après a), on a vu que si un nombre est racine, alors ce nombre $+1$ est racine aussi. Ainsi, $\alpha + n + 1$ est racine. La propriété est héréditaire.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ racine de P, donc P admet une infinité de racines : c'est impossible sauf si P est le polynôme nul.

c) Conclusion : P est nul ou n'a pas de racine, pas même complexes, donc $\boxed{P \text{ est nul ou } P \text{ est une constante}}$
Les constantes vérifient effectivement $\phi(P) = 0$, ce qui répond donc à la question.

4. a) Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. On calcule $\varphi(P)$:

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a + b(X+1) + c(X+1)^2 + d(X+1)^3 - (a + bX + cX^2 + dX^3) \\ &= b(X+1) + c(X^2 + 2X + 1) + d(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) - bX - cX^2 - dX^3 \\ &= b + c + d + X(2c + 3d) + X^2(3d)\end{aligned}$$

Ainsi, si $\varphi(P) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \delta X^3$, on a :

$$\begin{cases} \alpha &= b + c + d \\ \beta &= 2c + 3d \\ \gamma &= 3d \\ \delta &= 0 \end{cases}$$

b) Ainsi, $\boxed{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}$

c) On trouve $A^4 = \mathcal{O}_4$, et le calcul précédent montre qu'en calculant $A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont les coefficients d'un polynôme, on obtient les coefficients de $\varphi(P)$. Donc en répétant l'opération 4 fois, on aura les coefficients de $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(P))))$.
Or $A^4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathcal{O}_4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
Donc $\boxed{\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(P)))) = 0 \text{ (le polynome nul ! (et donc plus de } a, b, c \text{ ou } d\,;) \text{)}}$.

Exercice 6 : une fonction définie par une intégrale

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(x)$.
On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt.$$

1. a) Etudier la fonction f sur son ensemble de définition en donnant son signe et son tableau de variation.
   b) Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

   c) En déduire les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. a) Montrez que $0 \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq 1$ pour tout $t > 0$.
   b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ 0 \leq \Phi(x) \leq x$.
   c) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x)$.

1. a) Remarquons déjà que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par sommes de fonctions dérivables
De plus, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, donc f est décroissante sur $]0, 1[$, puis croissante sur $[1, +\infty[$, avec un minimum en 1, avec $f(1) = 1$. Ainsi f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0			1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$		0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		1	$\nearrow$	$+\infty$

(les limites n'étaient pas demandée, mais celle en $+\infty$ s'obtient par croissance comparée)

b) Comme f atteint son minimum en 1 et que $f(1) = 1$, f ne s'annule pas.

Ainsi, $t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur tout $[x, 2x]$ pour $x > 0$.

Ainsi Φ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons maintenant F une primitive de $\dfrac{1}{f}$. Alors $\Phi(x) = F(2x) - F(x)$, donc par composition et somme de fonctions dérivables, Φ est dérivable avec $\Phi'(x) = 2F'(2x) - F'(x)$

Comme $F'(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, il suffit de remplacer et de mettre au même dénominateur pour obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

c) D'après l'étude faite de f dans la question a, $x - \ln(x)$ et $(2x - \ln(2x))$ sont strictement positif. Donc $\Phi'(x)$ est du signe de $\ln(2) - \ln(x)$, c'est à dire croissante sur $]0, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$.

2. a) On sait déjà que $\dfrac{1}{f}$ est une fonction positive. Comme de plus pour tout $t > 0$, $f(t) \geq 1$, on a $\dfrac{1}{f(t)} \leq 1$.

On en déduit l'encadrement demandé.

b) Comme pour tout $x > 0$, $2x > x$, on peut procéder par croissance de l'intégrale, en partant de

$$0 \leq \frac{1}{f(t)} \leq 1$$

On intègre entre x et $2x$ et on tombe immédiatement sur l'encadrement proposé.

c) l'encadrement précédent donne par le theorème des gendarmes que $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x) = 0$