Corrigé du devoir surveillé nº 4 (v0)

d'après INP PSI 2024

Problème

File d'attente

I — Temps d'arrivée du n-ième client

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[T_1 = k]$ est réalisé quand le premier client arrive à l'instant k, c.à.d. quand il n'y a pas de client aux instants 1 à $(k-1)$, mais un client à l'instant k. Lorsque $k \geqslant 2$:

$$[T = k] = \bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0] \cap [X_k = 1].$$

Comme les variables $(X_k)_{k\geqslant 1}$ sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_1 = k) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0] \cap [X_k = 1]\right) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}(X_i = 0) \times \mathrm{P}(X_k = 1) \\ &= (1-p)^{k-1}\, p. \end{aligned}$$

Pour $k = 1$: $\mathrm{P}(T_1 = 1) = \mathrm{P}(X_1 = 1) = p = (1-p)^0\, p$
donc la formule est vraie également.

Conclusion : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}\, p$. La variable T_1 suit la loi géométrique de paramètre p.

2) Soit A l'événement « aucun client n'arrive dans la file ». Alors :

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} [T_1 \neq k] = \overline{\biguplus_{k=1}^{\infty} [T_1 = k]}$$

donc $\quad \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\biguplus_{k=1}^{\infty} [T_1 = k]\right) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(T_1 = k) = 1 - p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}.$

Comme $|1-p| < 1$: $\quad \mathrm{P}(A) = 1 - p \cdot \dfrac{(1-p)^0}{1-(1-p)} = 0$

Conclusion : Il est quasiment impossible qu'aucun client n'arrive dans la file.

3) La série entière définissant G_{T_1} est : $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \mathrm{P}(T_1 = k)\, t^k = \sum_{k\geqslant 1} p\,(1-p)^{k-1}\, t^k$.

En $t = \frac{1}{1-p} > 0$, son terme général s'écrit : $\quad p\,(1-p)^{k-1} \left(\frac{1}{1-p}\right)^k = \frac{p}{1-p}$,
qui est constant, donc borné, donc $R \geqslant \frac{1}{1-p}$;
mais qui ne tend pas vers 0, donc $R \leqslant \frac{1}{1-p}$, et ainsi $R = \frac{1}{1-p}$.
Sa somme sur l'ouvert de convergence vaut :

$$\begin{aligned} \forall\, t \in\,]-R, R[\,, \quad \mathrm{G}_{T_1}(t) &= p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}\, t^k = p\, t \sum_{k=1}^{\infty} \big((1-p)\, t\big)^{k-1} \\ &= \frac{p\, t}{1-(1-p)\, t} \qquad \text{car } |(1-p)\, t| < (1-p) R = 1. \end{aligned}$$

Conclusion : $\quad R = \dfrac{1}{1-p} \quad$ et $\quad \forall\, t \in\,]-R, R[\,,\ \mathrm{G}_{T_1}(t) = \dfrac{p\, t}{1-(1-p)\, t}$.

4) Sur son ouvert de convergence, la somme d'une série entière est dérivable terme à terme. Ainsi :

$$\forall\, t \in\,]-R, R[\,, \quad \mathrm{G}'_{T_1}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(T_1 = k)\, t^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(T_1 = k)\, k\, t^{k-1}.$$

Comme $R = \frac{1}{1-p} > 1$, on peut appliquer ce résultat en $t = 1$:

$$\mathrm{G}'_{T_1}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathrm{P}(T_1 = k) = \mathrm{E}(T_1).$$

Mais d'autre part, pour tout $t \in\,]-R, R[$:

$$\begin{aligned} \mathrm{G}'_{T_1}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p\, t}{1-(1-p)\, t}\right) &= \frac{p \times \big(1-(1-p)\, t\big) - p\, t \times -(1-p)}{\big(1-(1-p)\, t\big)^2} \\ &= \frac{p}{\big(1-(1-p)\, t\big)^2}. \end{aligned}$$

Finalement : $\quad \mathrm{E}(T_1) = \mathrm{G}'_{T_1}(1) = \dfrac{p}{\big(1-(1-p)\big)^2} = \dfrac{1}{p}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n.

5) • Les variables T_1 et T_2 prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

- Prenons k et ℓ dans $\mathbb{N}^*$ et calculons $\mathrm{P}(T_1 = k,\ T_2 = \ell)$:

$$[T_1 = k,\ T_2 = \ell] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = 0]\right) \cap [X_k = 1] \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{k+\ell-1} [X_i = 0]\right) \cap [X_{k+\ell} = 1].$$

Comme les variables (X_k) sont indépendantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_1 = k,\ T_2 = \ell) &= \prod_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}(X_i = 0) \times \mathrm{P}(X_k = 1) \times \prod_{i=k+1}^{k+\ell-1} \mathrm{P}(X_i = 0) \times \mathrm{P}(X_{k+\ell} = 1) \\ &= (1-p)^{k+\ell-2}\, p^2.\end{aligned}$$

- Si on prend $k = \infty$, alors pour tout $\ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$:

$[T_1 = \infty,\ T_2 = \ell] \subset [T_1 = \infty] = A$ donc $\mathrm{P}(T_1 = \infty,\ T_2 = \ell) \leqslant \mathrm{P}(A) = 0$,

donc $\mathrm{P}(T_1 = \infty,\ T_2 = \ell) = 0$.
Si on prend $k \in \mathbb{N}^*$ et $\ell = \infty$:

$$[T_1 = k,\ T_2 = \infty] \subset \bigcap_{i=k+1}^{\infty} [X_i = 0]$$

$$\begin{aligned}\text{donc} \quad \mathrm{P}(T_1 = k,\ T_2 = \infty) &\leqslant \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{\infty} [X_i = 0]\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{N} [X_i = 0]\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} (1-p)^{N-k} = 0.\end{aligned}$$

Conclusion : La loi jointe du couple (T_1, T_2) est donnée par :

$T_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $\quad T_2(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$,

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} : \quad \mathrm{P}(T_1 = k,\ T_2 = \ell) = \begin{cases} (1-p)^{k+\ell-2}\, p^2 & \text{si } k, \ell \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{si } k = \infty \text{ ou } \ell = \infty. \end{cases}$$

- Déterminons la loi (marginale) de T_2 : pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, par la formule des probabilités totales sur le s.q.c.e. $([T_1 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_2 = \ell) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(T_1 = k,\ T_2 = \ell) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k+\ell-2}\, p^2 \\ &= (1-p)^{\ell-1}\, p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(1-p)^{k-1}\, p}_{\mathrm{P}(T_1=k)} = (1-p)^{\ell-1}\, p.\end{aligned}$$

On constate que $T_2 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ également.

- Constatons que $T_1 \perp\!\!\!\perp T_2$: pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T_1 = k,\ T_2 = \ell) &= (1-p)^{k+\ell-2}\, p^2 = (1-p)^{k-1}\, p \times (1-p)^{\ell-1}\, p \\ &= \mathrm{P}(T_1 = k) \times \mathrm{P}(T_2 = \ell).\end{aligned}$$

Si $k = \infty$ ou $\ell = \infty$, les deux extrémités sont nulles, donc l'égalité est vraie également.

Conclusion : Les variables T_1 et T_2 sont indépendantes, de loi $\mathscr{G}(p)$.

On note $D_n = T_1 + \cdots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
On admet que les variables $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) et qu'en conséquence, leurs fonctions génératrices vérifient :

$$\forall\, t \in\,]-R, R[\,, \quad \mathrm{G}_{D_n}(t) = \big(\mathrm{G}_{T_1}(t)\big)^n.$$

6) Fixons $\alpha \in \mathbb{R}$. En posant $R' = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R' = +\infty$ sinon, on a :

$$\forall\, x \in\,]-R', R'[\,, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, x^n \quad \text{où} \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

7) D'après les propriétés admises sur les variables T_n et D_n :

$$\begin{aligned}\forall\, t \in\,]-R, R[\,, \quad \mathrm{G}_{D_n}(t) &= \big(\mathrm{G}_{T_1}(t)\big)^n = \left(\frac{p\, t}{1-(1-p)\, t}\right)^n \\ &= p^n\, t^n \cdot (1 - q\, t)^{-n} \quad \text{en posant } q := 1-p.\end{aligned}$$

Remarquons que $|q\, t| < 1$ pour tout $t \in\,]-R, R[$, donc on peut prendre $x = -q\, t$ dans le DSE de la question précédente :

$$\forall\, t \in\,]-R, R[\,, \quad \mathrm{G}_{D_n}(t) = p^n\, t^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} (-q\, t)^k$$

Calculons les a_k dans le contexte où $\alpha = -n$:

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad a_k = \prod_{\ell=0}^{k-1} (-n-\ell) = (-1)^k \prod_{\ell=0}^{k-1} (n+\ell) = (-1)^k\, \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!},$$

formule exacte également pour $k=0$, où les deux membres valent 1.
En injectant dans le DSE de G_{D_n} :

$$\begin{aligned}\forall\, t\in\,]-R,R[\,,\quad G_{D_n}(t) &= p^n\, t^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}\,(-q\,t)^k\\ &= p^n\, t^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}q^k\,t^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}p^n\,q^k\,t^{n+k}\\ &= \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-1}{k-n}p^n\,q^{k-n}\,t^n.\end{aligned}$$

Mais le DSE de G_{D_n} s'écrit aussi : $\forall\, t\in\,]-R,R[\,,\ G_{D_n}(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}P(D_n=k)\,t^k$.

Par unicité du DSE, on peut identifier les coefficients :

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad P(D_n=k)=\begin{cases}0 & \text{si } k<n,\\ \binom{k-1}{k-n}p^n\,q^{k-n} & \text{si } k\geqslant n.\end{cases}$$

II — Étude du comportement de la file

Une suite récurrente

Soient $a>0$ et $f:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto \exp\big(a\,(x-1)\big).\end{array}$

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_1\in\,]\,0,1\,[\quad\text{et}\quad\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ z_{n+1}=f(z_n).$$

8)
- Comme $a>0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  De plus, elle est continue sur l'intervalle $]0,1[$.
  Par le théorème de la bijection monotone, elle est bijective de $I:=\,]\,0,1\,[$ dans $J:=\big]\lim_{0^+}f,\ \lim_{1^-}f\big[=\big]\,e^{-a},\ 1\big[\subset\,]\,0,\ 1\,[$.
  En particulier, **l'intervalle I est stable par f.**
- Puisque $z_1\in I$ et que $z_{n+1}=f(z_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on prouve par récurrence sur n que tous les z_n sont dans I.
- Supposons que $z_1<z_2$. En appliquant la fonction f, **strictement monotone sur $\mathbb{R}$,** on obtient $z_2<z_3$, puis en recommençant, que $z_3<z_4$ et ainsi de suite. On démontre par récurrence que $z_n<z_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; autrement dit : $z_{n+1}-z_n>0$, de même que $z_2-z_1>0$.
  On montre de même que si $z_1>z_2$, alors $z_n>z_{n+1}$ pour tout $n\geqslant 1$.
  Dans tous les cas : $z_{n+1}-z_n$ est du même signe que z_2-z_1.

9)
- D'après la question précédente, la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est toujours monotone, et elle est bornée car tous ses termes sont dans $]\,0,1\,[$.
  Le théorème de convergence monotone prouve que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
- En notant $\ell\in\mathbb{R}$ sa limite, puisque $0\leqslant z_n\leqslant 1$ pour tout $n\geqslant 1$, en passant à la limite dans les inégalités **larges,** $0\leqslant\ell\leqslant 1$.
- Par définition de la suite : $\forall\, n\geqslant 1,\ z_{n+1}=f(z_n)$.
  Quand $n\to\infty$:
  - $\ast$ $z_{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell$ par le théorème des suites extraites,
  - $\ast$ $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell\in\mathbb{R}$ et f est continue en ℓ (elle l'est sur $\mathbb{R}$),
    donc par composition de limites : $f(z_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(\ell)$.

  Par unicité de la limite de la suite $(z_{n+1})_{n\geqslant 1}$: $\ell=f(\ell)$.

Conclusion : La suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limites $\ell\in[0,1]$ vérifiant $f(\ell)=\ell$.

10) Soit $\psi:x\in\,]\,0,1\,]\mapsto\ln(x)-a\,(x-1)\in\mathbb{R}$. Pour $x\in\,]\,0,1\,]$ (rem. : sinon $\psi(x)$ n'est pas défini !) quelconque :

$$\begin{aligned}0\leqslant\psi(x)\ &\Longleftrightarrow\ 0\leqslant\ln(x)-a\,(x-1) && (\text{définition de } \psi)\\ &\Longleftrightarrow\ a\,(x-1)\leqslant\ln(x) && (+\,a\,(x-1))\\ &\Longleftrightarrow\ f(x)\leqslant x && (t\mapsto\exp(t)\text{ strictement croissante sur }\mathbb{R})\end{aligned}$$

On montre par les mêmes arguments que : $0=\psi(x)\iff f(x)=x$.

11) Supposons que $a\leqslant 1$.
- La fonction ψ est dérivable sur $]\,0,1\,]$ et :

$$\forall\, x\in\,]\,0,1\,],\quad\psi'(x)=\frac{1}{x}-a\geqslant 1-a\geqslant 0,$$

  avec une seule annulation éventuelle en 1 de cette dérivée.
  La fonction ψ est donc strictement croissante sur $]\,0,1\,]$, donc elle s'y annule au plus une fois.
  Puisque $\psi(1)=0$, elle ne s'annule qu'en 1.
- D'après la question précédente, le seul point de $]\,0,1\,]$ où $f(x)=x$ est donc $x=1$. De plus, $f(0)=e^{-a}\neq 0$, donc l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution sur $[\,0,1\,]$, qui est 1.
  D'après la question **9**, la limite de la suite $(z_n)_{n>1}$ est nécessairement 1.

Conclusion : Si $a\leqslant 1$, alors $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

12) Supposons maintenant que $a > 1$.

- Cette fois, la dérivée de ψ s'annule sur $]\,0,1\,]$ en $x_0 = \frac{1}{a} \in]\,0,1\,[$, et ψ est strictement croissante que $]\,0,x_0\,]$
  et strictement décroissante sur $[\,x_0,1\,]$.
  Étudions les annulations de ψ :
  - **On sait que $\boldsymbol{\psi(1) = 0}$.**
  - Puisque ψ est strictement décroissante sur $[\,x_0,1\,]$, pour tout $x \in [\,x_0,1\,[$, $\psi(x) > \psi(1) = 0$.
    Ainsi **$\boldsymbol{\psi}$ ne s'annule pas sur $\boldsymbol{[\,x_0,1\,[}$.**
  - En particulier : $\psi(x_0) > 0$, tandis que $\lim\limits_{0^+} \psi = -\infty$.
    Cela donne envie d'appliquer le théorème de la bijection monotone sur $I_1 :=]\,0,x_0\,]$: ψ est strictement croissante sur I_1, y est continue, et comme $\lim\limits_{0^+} \psi < 0 < \psi(x_0)$, **l'équation $\boldsymbol{\psi(x) = 0}$ admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha}$ sur $\boldsymbol{I_1}$.**

  L'équation $\psi(x) = 0$ admet exactement 2 solutions α et 1 sur $]\,0,1\,]$; puisque $f(0) \neq 0$, ce sont aussi les solutions de $f(x) = x$ sur $[\,0,1\,]$.
- **Supposons que $\boldsymbol{z_1 \in]\,0,\alpha\,]}$.**
  D'après ce qui précède, $\psi(z_1) \leqslant 0$, donc $f(z_1) \geqslant z_1$ d'où $z_2 \geqslant z_1$.
  Grâce à la question **8**, la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante.
  De plus, en partant de $z_1 \leqslant \alpha$ et en appliquant f (croissante), on montre par récurrence que $z_n \leqslant \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
  En passant à la limite dans les inégalités larges, on obtient $\ell \leqslant \alpha$,
  et comme ℓ ne peut être que α ou $1 > \alpha$, obligatoirement $\ell = \alpha$.
- **Supposons que $\boldsymbol{z_1 \in]\,\alpha,1\,[}$.**
  Cette fois, $\psi(z_1) > 0$, et en raisonnant comme précédemment, la suite $(z_n)_{n>1}$ est décroissante.
  Mais alors : $\forall\, n \geqslant 1,\ z_n \leqslant z_1$;
  en passant à la limite dans les inégalités larges : $\ell \leqslant z_1 < 1$.
  Dans ce cas, la seule possibilité restante est $\ell = \alpha$.

Conclusion : Quand $a > 1$, la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ converge toujours vers le point fixe α de la fonction f sur $]\,0,1\,[$.

Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.

Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $\{V_k = 0\}$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

13) D'après l'énoncé, $S \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, donc l'ensemble des valeurs possibles de S est $S(\Omega) = \mathbb{N}$ et :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(S = n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!}.$$

14) L'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{V_n = 0\}$ est réalisé lorsque l'un, au moins, des événements $\{V_n = 0\}$ l'est. Cela signifie qu'il existe un numéro n pour lequel aucun nouveau client n'est arrivé pendant que l'on servait les clients du groupe n. Une fois ce groupe servi, il n'y a donc plus personne dans la file d'attente.

Conclusion : L'événement Z est réalisé lorsqu'au cours de l'expérience, il arrive que la file contienne zéro client en attente.

15) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre N_n de clients arrivés dans la file dans l'intervalle de temps $[\![1,n]\!]$: compte le nombre de succès (un client arrive) au cours de n épreuves de Bernoulli (un client est-il arrivé ?) indépendantes (les variables (X_k) le sont) et de probabilité de succès p constante.

Conclusion : N_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

16)
- Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons l'événement $[S = n]$ réalisé : le temps de service du client initial vaut n.
  Les clients du premier groupe sont donc ceux arrivés entre les instants 1 et n : ils sont au nombre de N_n. On en tire :
  $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(V_1 = k \mid S = n) = \mathrm{P}(N_n = k \mid S = n).$$
  Remarquons que $N_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Puisque les variables $(X_1, \ldots, X_n, S)$ sont indépendantes, par le lemme des coalitions, $N_n \perp\!\!\!\perp S$ et pour cette raison :
  $$\begin{aligned}\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(V_1 = k \mid S = n) = \mathrm{P}(N_n = k \mid S = n) &= \mathrm{P}(N_n = k)\\ &= \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k\, q^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n,\\ 0 & \text{si } k > n.\end{cases}\end{aligned}$$
- Déterminons maintenant la loi de V_1. On sait que $V_1(\Omega) = \mathbb{N}$: prenons $k \in \mathbb{N}$ et appliquons la formule des probabilités totales sur le s.c.e. engen-

dré par la variable S :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(V_1=k)&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}(S=n)\cdot\mathrm{P}(V_1=k\mid S=n)=\sum_{n=k}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}\cdot\binom{n}{k}p^k\,q^{n-k}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}\,q^{n-k}=\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{p^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+k}}{n!}\,q^n\\&=\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda q)^n}{n!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{(\lambda p)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{\lambda q}=\mathrm{e}^{-\lambda p}\,\frac{(\lambda p)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Conclusion : $V_1\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda p)$.

17) Posons $z_n:=\mathrm{P}(V_n=0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
D'après l'énoncé, si un événement $[V_n=0]$ est réalisé, tous les événéments $[V_k=0]$, pour $k>n$, le sont aussi par convention.
En d'autres termes : la suite d'événements $\big([V_n=0]\big)_{n\geqslant 1}$ est croissante pour l'inclusion.
Par la continuité croissante de la probabilité :

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(V_n=0)=\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[V_n=0]\right)=\mathrm{P}(Z).$$

18) Fixons $j\in\mathbb{N}$.

- **1^er cas :** si $j=0$. On a d'après l'énoncé :

$$\mathrm{P}(V_{n+1}=0\mid V_1=0)=1=\big(\mathrm{P}(V_n=0)\big)^0.$$

- **2^e cas :** si $j=1$. Supposons l'événement $[V_1=j]$ réalisé. Le premier groupe est composé des clients de 1 à j. Par analogie avec les groupes de clients définis dans l'énoncé, pour tout client d'indice $i\in[\![1,j]\!]$, on note $G_1^{(i)}$ l'ensemble des clients du deuxième groupe arrivés pendant que i était servi. Puis, récursivement, on note $G_k^{(i)}$ l'ensemble des clients du $(k+1)^{\mathrm{e}}$ groupe arrivés pendant que les clients de $G_{k-1}^{(i)}$ étaient servis.
Par construction, le $(k+1)^{\mathrm{e}}$ groupe est l'union disjointe des $G_k^{(i)}$, pour les $i\in[\![1,j]\!]$. On en déduit que :

$$V_{k+1}=\sum_{i=1}^{j}V_k^{(i)},$$

où $V_k^{(i)}$ représente le nombre de clients du sous-groupe $G_k^{(i)}$.
Or, pour tout i, la variable $V_k^{(i)}$ suit un processus identique à celui de la variable V_k, en ne considérant que les temps de passage des clients appartenant aux groupes issus du client i.

On en déduit que $V_k^{(i)}$ suit la même loi que V_k. Nous admettrons que les variables $V_k^{(i)}$, pour $i\in[\![1,p]\!]$, sont indépendantes, et qu'elles sont indépendantes de V_1 (une preuve rigoureuse serait franchement laborieuse à écrire !).
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, on remarque que :

$$[V_{n+1}=0]=\bigcap_{i=1}^{n}[V_n^{(i)}=0]$$

car toutes les $V_n^{(i)}$ sont positives, donc $V_{n+1}>0$ dès que l'une n'est pas nulle.
En utilisant l'indépendance :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(V_{n+1}=0\mid V_1=j)&=\prod_{i=1}^{j}\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[V_n^{(i)}=0]\;\middle|\;V_1=j\right)=\prod_{i=1}^{j}\mathrm{P}\left(V_n^{(i)}=0\right)\\&=\prod_{i=1}^{j}\mathrm{P}\left(V_n^{(i)}=0\right)=\big(\mathrm{P}(V_n=0)\big)^j.\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall\, j,n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{P}(V_{n+1}=0\mid V_1=j)=\big(\mathrm{P}(V_n=0)\big)^j$.

19) Fixons $n\in\mathbb{N}^*$. Calculons $\mathrm{P}(V_{n+1}=0)$ en lui appliquant la formule des probabilités totales sur le s.c.e. engendré par V_1 (qui suit la loi $\mathscr{P}(\lambda p)$ d'après **Q16**) :

$$\begin{aligned}z_{n+1}=\mathrm{P}(V_{n+1}=0)&=\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{P}(V_1=j)\cdot\mathrm{P}(V_{n+1}=0\mid V_1=j)\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda p}\,\frac{(\lambda p)^j}{j!}\cdot\big(\mathrm{P}(V_n=0)\big)^j=\mathrm{e}^{-\lambda p}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda p\, z_n)^j}{j!}\\&=\mathrm{e}^{-\lambda p}\cdot\exp(\lambda p\, z_n)\\&=\exp\big(\lambda p\,(z_n-1)\big).\end{aligned}$$

20) La suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ de cette partie vérifie toutes les hypothèses de la suite récurrente de la partie **II** avec $a=\lambda p>0$:

∗ La question précédente montre que $z_{n+1}=f(z_n)$ pour tout $n\geqslant 1$;
∗ $z_1=\mathrm{P}(V_1=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}\in\,]0,1[$.

D'après les résultats de **Q11** et **Q12** :

∗ Si $\lambda p\leqslant 1$, alors $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.
On en déduit que $\mathrm{P}(Z)=1$: il est quasi certain qu'à un moment donné, la file d'attente sera vide.
∗ Si $\lambda p>1$, alors $z_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha\in\,]0,1[$.
Cette fois $\mathrm{P}(Z)=\alpha$: il y a un risque non négligeable (de probabilité $1-\alpha$) que la file d'attente ne se vide jamais.