

I Préliminaires

Q1 $G_1 = X(1 + (1+X)1') = X \cdot 1 = X$ et
 $G_2 = X(X + (1+X)X') = X(2X+1) = 2X^2 + X$.

Q2 On sait que $R_0 := R(\sum_{n \geq 0} x^n) = 1$
 et que $\forall x \in]-1, 1[: \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
 donc $D_0 : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Q3 Multiplier par k ne change pas le rayon de cv,
 donc : $\forall k \in \mathbb{N} : R_{nk} := R(\sum_{k \geq 0} k^{nk} x^k) = R(\sum_{k \geq 0} k^n x^k)$
 $= R_n$;

en d'autres termes, la suite $(R_n)_{n \geq 0}$ est constante.
 Puisque $R_0 = 1$: $\forall n \in \mathbb{N} : R_n = 1$.

Q4 Puisqu'on peut dériver terme à terme une
 somme de SE sur son ouvert de convergence:
 $\forall x \in]-1, 1[: x D'_n(x) = x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} k^n x^k$
 $= x \sum_{k=1}^{\infty} k^n \cdot k x^{k-1}$
 $= \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+1} x^k$
 $= \sum_{k=0}^{\infty} k^{n+1} x^k$ (car $0^1 x^0 = 0$)
 $= D_{n+1}(x)$

Q5 Prouvons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$\mathcal{H}(n)$: " $\forall x \in]-1, 1[: D_n(x) = \frac{1}{1-x} G_n\left(\frac{x}{1-x}\right)$ ".

• **Initialisation** pour $n=0$, puisque $G_0(x) = 1$,
 $\forall x \in]-1, 1[: \frac{1}{1-x} G_0\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x} \cdot 1 = \frac{1}{1-x} = D_0(x)$.
 $\mathcal{H}(0)$ est établie.

• **Hérédité** Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $\mathcal{H}(n)$
 vraie. Montrons $\mathcal{H}(n+1)$:

$\forall x \in]-1, 1[:$

$$\begin{aligned} D_{n+1}(x) &= x D'_n(x) \quad (\text{Q4}) \\ &= x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) \right) \quad (\text{par } \mathcal{H}(n)) \\ &= x \left[\frac{1}{(1-x)^2} G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{1}{1-x} G'_n\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) \right] \\ &= x \left[\frac{1}{(1-x)^2} G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{1}{(1-x)^3} G'_n\left(\frac{x}{1-x}\right) \right] \\ &= \frac{1}{1-x} \left(\frac{x}{1-x} \right) \cdot \left[G_n\left(\frac{x}{1-x}\right) + \left(1 + \frac{x}{1-x}\right) G'_n\left(\frac{x}{1-x}\right) \right] \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \left[X(G_n(X) + (1+X)G'_n(X)) \right] \left(\frac{x}{1-x} \right) \\ &= \frac{1}{1-x} G_{n+1}\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad (\text{par def. de } G_{n+1}) \end{aligned}$$

...Q5

donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est établie.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[: D_n(x) = \frac{1}{1-x} G_n\left(\frac{x}{1-x}\right).$

II

Nombre de Fibonacci

Q6

Par la relation de définition des $(F_n)_{n \geq 1}$:

$$F_1 = \sum_{k=0}^0 \binom{1}{k} F_0 = \binom{1}{0} F_0 = 1.$$

$$F_2 = \sum_{k=0}^1 \binom{2}{k} F_k = F_0 + 2F_1 = 3.$$

$$F_3 = \sum_{k=0}^2 \binom{3}{k} F_k = F_0 + 3F_1 + 3F_2 = 1 + 3 + 9 = 13.$$

Q7

Pour déterminer toutes les partitions ordonnées de $\{1, 2, 3\}$, on choisit une partition de $\{1, 2, 3\}$ puis on prend toutes ses permutations.

- Avec 1 partie: $(\{1, 2, 3\})$
- Avec 2 parties: $(\{1, 2\}, \{3\})$ $(\{3\}, \{1, 2\})$
 $(\{1, 3\}, \{2\})$ $(\{2\}, \{1, 3\})$
 $(\{2, 3\}, \{1\})$ $(\{1\}, \{2, 3\})$
- Avec 3 parties: $(\{1\}, \{2\}, \{3\})$ $(\{1\}, \{3\}, \{2\})$,
 $(\{2\}, \{1\}, \{3\})$, $(\{2\}, \{3\}, \{1\})$,
 $(\{3\}, \{1\}, \{2\})$, $(\{3\}, \{2\}, \{1\})$.

Il y a au total 13 partitions ordonnées de $\{1, 2, 3\}$.

Q8

Pour compter les partitions ordonnées de $\{1, \dots, n\}$, comptons d'abord celles dont la première partie comporte k éléments ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) pour k fixé.

Pour construire une telle partition, il suffit de se donner: 1) Une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments: $\binom{n}{k}$ possibilités 2) Une partition ordonnée des $(n-k)$ éléments restants. Quitte à les renuméroter de 1 à $n-k$, cela revient à donner une partition ordonnée de $\{1, \dots, n-k\}$.

u_{n-k} possibilités.

Par le principe multiplicatif, il y a donc $\binom{n}{k} u_{n-k}$ partitions de $\{1, \dots, n\}$ dont la première partie comporte k éléments.

Comme chaque partition a une première partie qui comporte un nombre k et un seul d'éléments ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$), par le principe additif:

$$u_n = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} u_{n-k}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Q9

Les suites $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même terme initial et satisfont la même relation de récurrence forte sur $\mathbb{N}$ (déf. (F_n) et Q8).

Elles sont donc égales: $\forall n \in \mathbb{N}: F_n = u_n$.

Plus précisément:

Prouvons, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ les propositions $\mathcal{H}(n)$: " $F_n = u_n$ ".

• **Initialisation forte**: pour $n=0$, $F_0 = 1 = u_0$ donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

• **Hérédité forte**: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que: $\forall k \in [0, n]$: $\mathcal{H}(k)$ est vraie.

Montrons $\mathcal{H}(n+1)$:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} F_k \quad (\text{déf. } (F_n)) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} u_k \quad (\mathcal{H}(k) \text{ pour } k \in [0, n]) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{n+1-k} u_{n+1-k} \quad (\text{symétrie d'indices } k' = n+1-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} u_{n+1-k} \quad (\text{symétrie des coeff. binomiaux}) \\ &= u_{n+1} \quad (\text{Q8 avec } n \leftarrow n+1 \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

$\mathcal{H}(n+1)$ est démontrée.

Q10

On rappelle que: $\forall x \in \mathbb{R}: e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Pour $x = \ln 2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} = 2$

$$\text{d'où il vient: } \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^k}{k!} = 2 - \underbrace{\frac{(\ln 2)^0}{0!}}_{=1} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!}}_{\geq 0}$$

$$\leq 1.$$

Q11

Montrons, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ les propositions: $\mathcal{H}(n)$ " $0 \leq \frac{F_n}{n!} \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}$ ".

• **Initialisation forte**: pour $n=0$,

$$\frac{F_0}{0!} = 1 \text{ et } \frac{1}{(\ln 2)^0} = 1 \text{ donc } 0 \leq \frac{F_0}{0!} \leq \frac{1}{(\ln 2)^0}.$$

$\mathcal{H}(0)$ est vraie.

• **Hérédité forte**: prenons $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et supposons $\mathcal{H}(k)$ vraie pour tout $k \in [0, n-1]$.

Par définition: $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k$

$$\text{donc } \frac{F_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{F_k}{k!}$$

En sommant les encadrements

$$\mathcal{H}(k) \quad 0 \leq \frac{F_k}{k!} \leq \frac{1}{(\ln 2)^k} \text{ pour } k \in [0, n-1]:$$

multipliés par $\frac{1}{(n-k)!} \geq 0$, on obtient:

$$0 \leq \frac{F_n}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{(\ln 2)^k}.$$

On effectue la symétrie d'indice $k' = n - k$:

$$0 \leq \frac{F_n}{n!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(\ln 2)^{n-k}} = \frac{1}{(\ln 2)^n} \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^k}{k!} \\ \leq \frac{1}{(\ln 2)^n} \text{ d'après Q10.}$$

Ainsi $\mathcal{H}(n)$ est démontrée.

Q12

En $z = \ln 2 > 0$, le terme général de la SE $\sum_{n \geq 0} \frac{F_n}{n!} z^n$ vérifie: $\forall n \in \mathbb{N} : \left| \frac{F_n}{n!} (\ln 2)^n \right| \leq \frac{(\ln 2)^n}{(\ln 2)^n} = 1$.
il est borné.

Ainsi, le rayon de convergence R associé vérifie $R \geq \ln 2$.

Q13

• Puisque $R \neq 0$, les coeff. $\left(\frac{F_n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ de la SE sont reliés aux dérivées de sa somme f par: $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{F_n}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ c'ad $F_n = f^{(n)}(0)$.

• Grâce à la formule admise pour $f^{(n)}(x)$:
 $F_n = f^{(n)}(0) = G_n \left(\frac{1}{2e^0 - 1} \right) f(0) = G_n(1) F_0 = G_n(1)$.
Utilisons maintenant Q5 avec $x = 1/2$; ainsi $\frac{x}{1-x} = 1$ et on obtient $D_n(1/2) = 2 G_n(1)$.
Par conséquent: $F_n = \frac{1}{2} D_n(1/2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k^n}{2^k}$. (def D_n avant Q3)

Q14 Q15
Q16

C'est du cours mes poulets!

Soit $a > 0$ tel que $a \notin \mathbb{N}$.

Puisque $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$

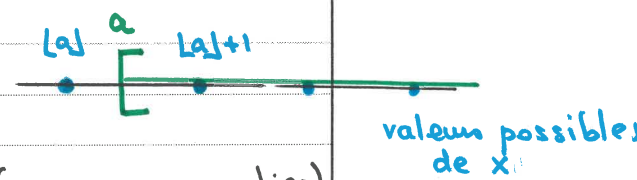
et même $\lfloor a \rfloor < a < \lfloor a \rfloor + 1$ (car a non entier)

Puisque X ne prend que des valeurs entières,

$\forall w \in \mathbb{N} : X(w) \geq a \Leftrightarrow X(w) \geq \lfloor a \rfloor + 1$.

Les événements $[X \geq a]$ et $[X \geq \lfloor a \rfloor + 1] = [X > \lfloor a \rfloor]$ sont égaux, d'où:

$$P(X \geq a) = P(X > \lfloor a \rfloor) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\lfloor a \rfloor} = \frac{1}{2^{\lfloor a \rfloor}}$$

puisque $x \mapsto \mathbb{P}_y(1/2)$ 

Q17

Comme $f: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$, on a:

$$\forall k \in Y(\Omega) : \underbrace{f(k)}_{\geq 0} \underbrace{P(Y=k)}_{\in [0,1]} \in \mathbb{R}_+$$

Puisque Y est une v.a. discrète, l'ensemble $Y(\Omega)$ est au plus dénombrable.

La famille $(f(k) P(Y=k))_{k \in Y(\Omega)}$ est donc une famille au plus dénombrable d'éléments positifs: sa somme

$$\sum_{k \in Y(\Omega)} f(k) P(Y=k) \text{ existe dans } [0, \infty].$$

Q18

On applique la formule de transfert à la variable aléatoire X , pour laquelle $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et à la fonction $f: k \in \mathbb{N}^* \rightarrow k^m \in \mathbb{R}_+$.

On obtient:

$$E(X^m) = \sum_{n=1}^{\infty} k^n P(X=k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{2^n} = 2F_m$$

d'après Q13.

Q19

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et étudions $g_n: t \mapsto t^n e^{-t \ln 2}$ sur $I := \mathbb{R}_+$. g_n est dérivable sur I par les théorèmes opératoires, et:

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0: g'_n(t) &= n t^{n-1} e^{-t \ln 2} + t^n e^{-t \ln 2} \cdot (-\ln 2) \\ &= t^{n-1} e^{-t \ln 2} (n - t \cdot \ln 2) \end{aligned}$$

Notons que $g'_n(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{n}{\ln 2}$ ou ($n \geq 2$ et $t=0$).

t	0	$\frac{n}{\ln 2}$	$+\infty$
$g'_n(t)$	0*	+	-
g_n	0	$\nearrow M_n$	$\searrow$

* sauf si $n=1$

Ainsi, sur $\mathbb{R}_+$, g_n a pour maximum $M_n = g_n\left(\frac{n}{\ln 2}\right)$

$$= \frac{n^n e^{-n}}{(\ln 2)^n}.$$

Q20

On a vu en Q18 que

$$E(X^n) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^n P(X=k).$$

Fixons $a > 0$ et séparons les termes d'indices $k \geq a$ de ceux d'indice $k < a$:

$$E(X^n) = \underbrace{\sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ k \geq a}} k^n P(X=k)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ k < a}} k^n P(X=k)}_{S_2}.$$

- dans la première somme, $k \geq a$ donc $k^n \geq a^n$ ($t \mapsto t^n \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$) d'où, puisque $P(X=k) \geq 0$:
 $k^n P(X=k) \geq a^n P(X=k).$

Par croissance de la sommation de familles d'éléments positifs,

$$\begin{aligned} S_1 &\geq \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ k \geq a}} a^n P(X=k) = a^n \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq a}} P(X=k) \\ &= a^n P\left(\bigcup_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \geq a}} [X=k]\right) \\ &= a^n P(X \geq a). \end{aligned}$$

- on remarque simplement que S_2 est une somme d'éléments positifs, donc $S_2 \geq 0$.

Conclusion: $E(X^n) = S_1 + S_2 \geq a^n P(X \geq a) + 0$
 $E(X^n) \geq a^n P(X \geq a).$

Q21

Grâce à Q18: $F_n = \frac{1}{2} E(X^n)$ puis par Q20: $\forall a > 0: F_n \geq \frac{1}{2} a^n P(X \geq a)$

En appliquant Q16:

 $\forall a > 0 / a \notin \mathbb{N}: F_n \geq \frac{1}{2} a^n \frac{1}{2|a|} = \frac{1}{2} a^n e^{-|a| \ln 2}$
et puisque $|a| \leq a$ et $\ln 2 > 0$,

$$\begin{aligned} -|a| \ln 2 &\geq -a \ln 2 && \downarrow \exp \nearrow \text{sur } \mathbb{R} \\ e^{-|a| \ln 2} &\geq e^{-a \ln 2} \end{aligned}$$

$$\text{donc: } \forall a > 0 / a \notin \mathbb{N}: F_n \geq \frac{1}{2} a^n e^{-a \ln 2} = \frac{1}{2} g_n(a)$$

Pour exploiter la question Q19, on applique cette inégalité au point $a_0 := \frac{n}{\ln 2}$, où g_n est maximal (c'est possible puisque a_0 n'est pas un entier, sinon $\ln 2$ serait rationnel). On obtient alors: $F_n \geq \frac{1}{2} M_n = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{e \ln 2} \right)^n$.

III

Équivalent de F_n

Q22

Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, les:
 $\mathcal{H}(n)$: " $\int_{\mathbb{R}_+} g_n$ converge et vaut $\frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$ "

Initialisation: pour $n=0$, $\int_0^{+\infty} g_n = \int_0^{+\infty} e^{-t \ln 2} dt$.

Puisque $\ln 2 > \ln 1 = 0$, cette intégrale usuelle converge et vaut $\frac{1}{\ln 2} = \frac{0!}{(\ln 2)^{0+1}}$:
 $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

Étudions $\int_0^{+\infty} g_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t \ln 2} dt$

en posant:

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0: \quad u(t) &= t^{n+1} & v'(t) &= e^{-t \ln 2} \\ u'(t) &= (n+1) t^n & v(t) &= -\frac{1}{\ln 2} e^{-t \ln 2} \end{aligned}$$

$$(H1) \quad u, v \in \mathcal{B}'([0, +\infty[, \mathbb{R})$$

$$(H2) \quad \forall t \geq 0: u(t)v(t) = -\frac{t^{n+1}}{\ln 2} e^{-t \ln 2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

limite **finie**.

$$(H3) \quad \int_0^{+\infty} -\frac{n+1}{\ln 2} t^n e^{-t \ln 2} \text{ par } \mathcal{H}(n) \text{ et la linéarité de l'intégrale.}$$

Par IPP: (1) $\int_0^{+\infty} g_{n+1}$ converge et

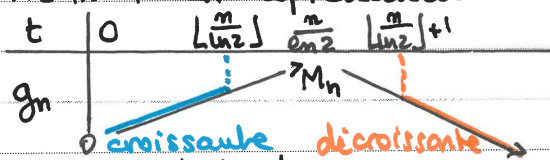
$$(2) \quad \int_0^{+\infty} g_{n+1} = \left[-\frac{t^{n+1}}{\ln 2} e^{-t \ln 2} \right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} g_n$$

$$= -0 + 0 + \frac{n+1}{\ln 2} \cdot \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}} \leftarrow \mathcal{H}(n)$$

$$= \frac{(n+1)!}{(\ln 2)^{n+1}}$$

$\mathcal{H}(n+1)$ est démontrée!

Q23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reprenant Q19 :Posons $N := \lfloor \frac{n}{\ln 2} \rfloor$. C'est un nombre entier.Puisque $\ln 2 \approx 0,69 < 1$, $\frac{n}{\ln 2} > n \geq 1$
donc par croissance de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$: $\lfloor \frac{n}{\ln 2} \rfloor \geq 1$
d'où $N \in \mathbb{N}^*$.Enfin, comme $0 < 1 \leq N < \frac{n}{\ln 2} < N+1$,
d'après le tableau de variation,
 g_n est croissante sur $[0; N]$ et décroissante
sur $[N+1; +\infty[$.

Q24

Pour chaque entier $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la fonction
 g_n est croissante sur $[k-1, k]$, donc
par croissance de l'intégrale :

$$g_n(k-1) \leq \int_{k-1}^k g_n \leq g_n(k)$$

En sommant pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\sum_{k=1}^N g_n(k-1) \leq \int_0^N g_n \leq \sum_{k=1}^N g_n(k)$$

et par glissement d'indice dans la 1^{ère} somme :

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_n(k) \leq \int_0^N g_n \leq \sum_{k=1}^N g_n(k).$$

Q25

- La nature d'une série ne dépendant pas de
ses premiers termes, montrons que $\sum_{k \geq 1} g_n(k)$
converge :

$$\forall k \geq 1 : k^2 g_n(k) = k^{n+2} e^{-n \ln 2} = \frac{k^{n+2}}{2^k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

donc $g_n(k) = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ quand $k \rightarrow \infty$ (H1)
et $\forall k \geq 1, \frac{1}{k^2} > 0$ (H2) et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge (Rie. $\alpha = 2 > 1$) (H3)

Par théorème de comparaison,

 $\sum_{k \geq 1} g_n(k)$, et donc $\sum_{k \geq N+1} g_n(k)$, convergent.

- Le même raisonnement que dans Q24, mutatis
mutandis, aboutit, pour tout entier $M > N$, à :

$$\sum_{k=N+2}^M g_n(k) \leq \int_{N+1}^M g_n \leq \sum_{k=N+1}^{M-1} g_n(k)$$

Quand $M \rightarrow \infty$, les 3 termes convergent :

d'après le point qui précède pour les sommes ;

d'après Q22 pour l'intégrale.

Par passage à la limite dans les inégalités
larges :

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} g_n(k) \leq \int_{N+1}^{\infty} g_n \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} g_n(k).$$

Q26

En additionnant les encadrements de Q24 et Q25 membre à membre, et en usant de relations de Charles:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_n(k) - g_n(N) - g_n(NH) \leq \int_0^{\infty} g_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} g_n(k). \quad (\square)$$

Or d'après (*): $\sum_{k=0}^{\infty} g_n(k) = 2F_n.$

et par Q22 $\int_0^{\infty} g_n = \frac{n!}{(\ln 2)^{nH}}.$

Revenons (□) sur $\sum_{k=0}^{\infty} g_n(k) - \int_0^{\infty} g_n$:

$$-\int_N^{NH} g_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} g_n(k) - \int_0^{\infty} g_n \leq g_n(N) + g_n(NH) - \int_N^{NH} g_n.$$

qui est l'encadrement demandé:

$$-\int_N^{NH} g_n \leq 2F_n - \frac{n!}{(\ln 2)^{nH}} \leq g_n(N) + g_n(NH) - \int_N^{NH} g_n.$$

Q27

Dégageons g_n sans ménagement, en utilisant

que: $\forall t \geq 0: 0 \leq g_n(t) \leq M_n.$

- On veut **minorer** $-\int_N^{NH} g_n$, c'est **majorer**

$$\int_N^{NH} g_n: \int_N^{NH} g_n \leq \int_N^{NH} M_n = M_n$$

donc $-\int_N^{NH} g_n \geq -M_n.$

- Inversement, à droite, on **majore**:

$$g_n(N) + g_n(NH) - \int_N^{NH} g_n \leq M_n + M_n + 0 = 2M_n.$$

On met cela au bout de Q26 et on divise par 2 pour obtenir:

$$\forall n \geq 1: -\frac{M_n}{2} \leq F_n - \frac{n!}{2(\ln 2)^{nH}} \leq M_n.$$

Cet encadrement prouve immédiatement

que $F_n - \frac{n!}{2(\ln 2)^{nH}} = o(M_n).$

Rappelons que $M_n = \left(\frac{n}{e \ln 2}\right)^n$ (Q19).

Montrons que $M_n = o\left(\frac{n!}{2(\ln 2)^{nH}}\right)$:

$$\frac{M_n}{n! / (\ln 2)^{nH}} = \frac{(n/e)^n / (\ln 2)^n}{n! / (\ln 2)^{nH}}$$

$$\sim \ln 2 \frac{(n/e)^n}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} \quad (\text{Stirling})$$

$$= \frac{\ln 2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{C'est bon!}$$

Finalement: $F_n = \frac{n!}{2(\ln 2)^{nH}} + o\left(\frac{n!}{(\ln 2)^{nH}}\right) \sim \frac{n!}{2(\ln 2)^{nH}}.$