MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,

TD n° 15.
Calcul matriciel.

Applications directes du cours

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez A^{-1} si elle existe.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrez qu'il existe $B \neq 0 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tel que $AB = 0$.

Exercice 3 Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques (resp. antisymétriques) soit symétrique (resp. antisymétrique).

Exercice 4 Montrez que $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est un élément de $Gl_2(\mathbb{R})$. Trouvez $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $AM = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 Inversez dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix}$.

Exercices classiques

Exercice 6 Déterminez les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 Déterminez toutes les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = I_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 8 Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que l'ensemble $\{A(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ est stable par produit matriciel.
2. Pour quelles valeurs de t la matrice $A(t)$ est-elle inversible ?

Exercice 9 Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est centrosymétrique si :

$$\forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!],\ a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}.$$

Montrez que l'ensemble de ces matrices est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10 Calculez $A^n,\ n \in \mathbb{N}$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 11 Soit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}, a,\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrez que E est un anneau pour les lois usuelles. Cette anneau est-il commutatif ?
2. Explicitez les éléments inversibles de E.

Exercice 12 Calculez $A^n, n \in \mathbb{N}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (Exprimez A à l'aide de I_3 et utilisez la formule du binôme).

Exercice 13 Soient K un corps commutatif et $A \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ on ait $AM = MA$. Montrez qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $A = \lambda I_n$.

Exercice 14 Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $G = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrez que G muni de la multiplication usuelle des matrices est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 15 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \mathrm{tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercices classiques*

Exercice 16 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} & a^{-2} & a^{-3} & a^{-4} \\ a & 0 & a^{-1} & a^{-2} & a^{-3} \\ a^2 & a & 0 & a^{-1} & a^{-2} \\ a^3 & a^2 & a & 0 & a^{-1} \\ a^4 & a^3 & a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Exprimez A^2 en fonction de A et de I_5.
2. En déduire que $A \in GL_5(\mathbb{R})$.
3. Exprimez le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X - 4$. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ strictement triangulaire supérieure. Montrez que $A^n = 0$.

Exercice 18 Inversez la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Exercice 19 Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, et $C = \{M(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrez que C est un corps pour les lois usuelles. explicitez un isomorphisme de coprs entre C et un corps connu.

Exercice 20 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$.

1. Montrez qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\in \mathbb{N}$, il existe $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ tels que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ et $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.
2. Déterminez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminez l'expression de u_n en fonction de n, et déterminez la nature de la suite (u_n), ainsi que sa limite si elle converge.

Exercice 21 Soient (x_n) et (y_n) deux suites définies par $x_0 = \frac{3}{5}$, $y_0 = \frac{2}{5}$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{1}{2}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{1}{2}y_n \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Déterminez $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrez que P est inversible, et déterminez D^n $(n \in \mathbb{N})$, où $D = PAP^{-1}$.
3. En déduire x_n et y_n en fonction de n, et étudiez leur limite éventuelle.

Exercices*

Exercice 22 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$. Montrez que $AB = BA$.

Exercice 23 Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à coefficients positifs, telle que : $\forall\, i = 1, \ldots, n,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

1. Montrez que $\mathcal{P}$ est stable par produit.
2. Déterminez les matrices de $\mathcal{P}$ inversibles dont l'inverse est encore dans $\mathcal{P}$.

Exercice 24 Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|.$$

Montrez que A est inversible.