

Chapitre 20

Développements limités

On considère dans ce chapitre un entier $n \in \mathbb{N}$, un intervalle I , $x_0 \in I$ et une fonction f à valeurs réelles définie sur I sauf peut-être en $x_0 \in I$. On note D_f son domaine de définition.

Remarques.

1. Rappel : $k > n$, on a $(x - x_0)^k = o(x - x_0)^n$.
2. Au voisinage de 0, x^n est négligeable devant x^m si et seulement si $n > m$, et que

$$o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\min(n,m)}), \quad x^n \times o(x^m) = o(x^{n+m}), \quad o(x^n) \times o(x^m) = o(x^{n+m}).$$

En résumé, on garde "le plus petit des petits o".

1 Définitions, premières propriétés

1.1 Développement limité en x_0

Définition 1.1

1. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0 (noté $DL_n(0)$) s'il existe des réels a_0, \dots, a_n tels que

$$\forall x \in D_f, f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

2. La fonction f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 (noté $DL_n(x_0)$) s'il existe des réels a_0, \dots, a_n tels que

$$\forall x \in D_f, f(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x - x_0)^i + o_{x \rightarrow x_0}(x - x_0)^n.$$

Remarques.

1. L'existence d'un $DL_n(0)$ est équivalente à l'existence de $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

2. On omettra l'indice x_0 en-dessous de $o(x - x_0)^n$ pour alléger les notations. Il n'y a de tout façon pas d'ambiguïté à partir du moment où on a précisé "développement limité en x_0 ".
3. On rappelle que $o(x - x_0)^n$ est une notation qui signifie que

$$o(x - x_0)^n = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction tendant vers 0 en x_0 (donc continue en x_0 si $x_0 \in D_f$ avec $\varepsilon(x_0) = 0$). Il faut toujours revenir à cette écriture dès que la moindre difficulté se présente. Il est vivement conseillé de refaire les démonstrations avec cette écriture.

4. On rappelle que $(x - x_0)^n o(x - x_0)^m = o(x - x_0)^{n+m}$.
5. Rappelons également que l'écriture $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(1)$ signifie $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Exemples.

1. Un polynôme de degré n admet un développement limité à l'ordre n en tout point : c'est une conséquence de la formule de Taylor (ici, $o(x - x_0)^n = 0!!$).
2. Soit f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1 + x).$$

Elle admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x) = 0 \quad \text{donc} \quad x^3 \ln(1 + x) = o(x^3).$$

3. La fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 - x}$$

définie sur $] -1, 1[$ admet un développement limité à tout ordre en 0. En effet, si $x \neq 0$, on a pour tout entier n

$$\frac{1}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \frac{x^{n+1}}{1 - x} = 0.$$

4. On démontrera plus tard les développements limités en 0 à tout ordre $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad \ln(1 + x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Proposition 1.2 (Unicité d'un développement limité)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 , celui-ci est unique, *i.e.* s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ tels que pour tout $x \in I$, on ait

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n b_k(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n,$$

alors $a_k = b_k$ pour tout $k = 0, \dots, n$.

Remarque.

En particulier, on a

$$\sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n = o(x - x_0)^n \iff a_0 = \dots = a_n = 0.$$

Définition 1.3 (Partie régulière)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$$\forall x \in D_f, f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{i=0}^n a_i(x - x_0)^i + o(x - x_0)^n,$$

le polynôme $\sum_{k=0}^n a_k(X - x_0)^k$ est la *partie régulière* du développement limité .

Proposition 1.4 (Changement de variable)

Soit g la fonction définie sur $\{h \in \mathbb{R} \mid h + x_0 \in \mathcal{D}_f\}$ par $g(h) = f(h + x_0)$. Alors f admet un $DL_n(x_0)$ si et seulement si g admet un $DL_n(0)$, et de plus, on a

$$\forall h \in \mathcal{D}_g, g(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{i=0}^n a_i h^i + o(h^n) \iff \forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{i=0}^n a_i(x - x_0)^i + o(x - x_0)^n.$$

Remarque.

C'est pourquoi les énoncés concernant les développements limités sont souvent donnés uniquement en 0. Un simple changement de variable donne le résultat partout.

Définition 1.5 (Forme normalisée)

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en x_0

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x - x_0)^i + o(x - x_0)^n,$$

de partie régulière non nulle. Soit p le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. La forme normalisée du développement limité est

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - x_0)^p \left(\sum_{i=p}^n a_i (x - x_0)^{i-p} + o((x - x_0)^{n-p}) \right) \\ &= (x - x_0)^p \left(a_p + a_{p+1}(x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^{n-p} + o((x - x_0)^{n-p}) \right). \end{aligned}$$

Le cas particulier $x_0 = 0$ s'écrit

$$f(x) = x^p \left(\sum_{i=p}^n a_i x^{i-p} + o(x^{n-p}) \right) = x^p \left(a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_n x^{n-p} + o(x^{n-p}) \right).$$

Proposition 1.6 (Troncature)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

elle en admet un à tout ordre $p \leq n$ qui est

$$f(x) = \sum_{k=0}^p a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^p)$$

(obtenu par *troncature* à l'ordre p).

Exemples.

1. La fonction polynomiale

$$P(x) = 3 + x^3 - x^5 + x^6$$

admet un développement limité à tout ordre en 0 qui sont

$$\begin{aligned} P(x) &= 3 + o(1) = 3 + o(x) = 3 + o(x^2) = 3 + x^3 + o(x^3) = 3 + x^3 + o(x^4) = 3 + x^3 - x^5 + o(x^5) \\ &= 3 + x^3 - x^5 + x^6 + o(x^6) = 3 + x^3 - x^5 + x^6 + o(x^n) \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 6$.

2. Un polynôme de degré n admet un développement limité à tout ordre. En effet, il existe des $a_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^p a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^p a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^p)$$

pour tout $p \geq n$ (avec $a_k = 0$ si $k > n$) d'après la formule de Taylor en x_0 . Par troncature, on obtient un développement limité à tout ordre.

3. Soit f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1 + x).$$

On a vu qu'elle admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 qui est

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + o(x^3).$$

Elle admet donc un développement limité à l'ordre 0, 1 et 2 en 0 qui sont

$$f(x) = o(1) = x + o(x) = x - x^2 + o(x^2).$$

Proposition 1.7 (Développement limité et équivalent)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$$f(x) = \sum_{k=p}^n a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

avec $a_p \neq 0$ ($p \leq n$), alors on a $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p (x - x_0)^p$. De plus, le signe de f au voisinage de x_0 est donné par le signe de $a_p (x - x_0)^p$.

Méthode 1.8

On utilise les développements limités pour déterminer un équivalent quand les techniques usuelles sur les équivalents ne fonctionnent pas. C'est très fréquent pour le cas des sommes. Mais en général, on utilise les développements limités en dernier ressort, et que dans le facteur qui pose problème.

Exemple.

Équivalent en 0 de $\frac{x(1 + \cos(x)) - 2 \tan(x)}{\sin(x^2)(\sin(x) + x^2)}$.

1.2 Développement limités à l'ordre 0 et 1

Proposition 1.9 (Développement limité à l'ordre 0 et limite/continuité)

1. La fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 qui est $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + o(1)$ si et seulement si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\longrightarrow} a_0$.
2. Si f est définie en x_0 , elle admet un développement limité à l'ordre 0 en x_0 $f(x) = a_0 + o(1)$ si et seulement si elle est continue en x_0 et $f(x_0) = a_0$.

Corollaire 1.10

Si f admet un développement limité en x_0 , alors f est soit continue en x_0 , soit prolongeable par continuité en x_0 .

Remarque.

Cette proposition nous permet de ne considérer que des fonctions **définies et continues en** x_0 (quitte à les prolonger par continuité). On aura donc $D_f = I$ dans toute la suite du chapitre.

Proposition 1.11 (Développement limité à l'ordre 1 et dérivabilité)

La fonction f admet un $DL_1(x_0)$ qui est $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$ si et seulement si elle est dérivable en x_0 , $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.

Proposition 1.12 (DL et continuité/dérivabilité)

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en x_0 qui est $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$, alors f est continue et dérivable en x_0 , $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.

Remarques.

1. Cette proposition nous permet de ne considérer que des fonctions **définies et continues en** x_0 (quitte à les prolonger par continuité). On aura donc $D_f = I$ dans toute la suite du chapitre, et le premier terme a_0 d'un développement limité en x_0 est

$$a_0 = f(x_0),$$

et qu'en cas de DL_1 , le coefficient a_1 devant $x - x_0$ n'est autre que $f'(x_0)$.

2. Attention, à partir de l'ordre 2, rien ne va plus. Par exemple, la fonction

$$x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 puisque

$$x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = o(x^2).$$

Mais pour $x \neq 0$, sa dérivée vaut

$$3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

qui n'admet pas de limite en 0, donc n'est pas continue en 0, donc n'est pas dérivable en 0, *i.e.* f n'est pas deux fois dérivable en 0.

2 Propriétés : somme, produit, parité

Proposition 2.1 (Parité)

Si f est paire (resp. impaire) et admet un développement limité en 0, sa partie régulière est paire (resp. impaire).

Exemples.

1. On verra les cas de sinus, cosinus, tangente.

2. La réciproque est fausse. Si f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ sinon, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0.

Remarque.

Si f est une fonction paire, le développement limité de f en 0 à l'ordre $2n$ donne immédiatement celui à l'ordre $2n+1$, puisque le coefficient devant x^{2n+1} est nul. De même pour les fonctions impaires et le passage de $2n-1$ à $2n$.

Proposition 2.2 (Somme)

Soient f et g définies sur I admettant chacune un $\text{DL}_n(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n.$$

La fonction $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 qui est

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n.$$

Proposition 2.3 (Produit de DL)

Soient f et g définies sur I admettant chacune un $\text{DL}_n(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^n b_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n.$$

La fonction fg admet un $\text{DL}_n(x_0)$ qui est

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) (x-x_0)^k + o(x-x_0)^n,$$

i.e. c'est le produit des parties régulières des développements limités de f et g tronqué à l'ordre n .

Proposition 2.4 (Puissance de DL)

Soit f définie sur I admettant un $\text{DL}_n(x_0)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n.$$

Si $s \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto (f(x))^s$ admet un $\text{DL}_n(x_0)$ qui est

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k \right)^s + o(x-x_0)^n,$$

où on tronque la puissance s -ème de la partie régulière à l'ordre n .

Remarques.

1. On tronque **toujours** un produit au fur et à mesure.
2. Notez bien que si f admet un développement limité d'ordre n et g un développement limité d'ordre m , la somme n'admet qu'un développement limité d'ordre $\min(n, m)$, et on tronque toujours les DL avant de faire la somme. Par exemple, la somme de $1 + x - x^2/3 + 6x^3 + o(x^3)$ et de $x^2 + o(x^4)$ donne un DL à l'ordre 3 seulement.
3. Pour le produit la situation est différente en utilisant la forme normalisée, cf. les exemples et la méthode 2.5.

Exemples.

1. La fonction

$$x \longmapsto e^x + \ln(1+x)$$

admet un développement limité en 0 à l'ordre 3 qui est

$$(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) + (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) = 1 + 2x + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

2. La fonction

$$x \longmapsto \frac{e^x}{1-x}$$

admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 qui est

$$(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3))(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3).$$

3. La fonction

$$x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{1-x}$$

admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 qui est

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) (1 + x + x^2 + o(x^2)) &= x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) (1 + x + x^2 + o(x^2)) \\ &= x \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{5}{6}x^2 + o(x^2)\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

4. La fonction

$$x \longmapsto (\ln(1+x))^2$$

admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 qui est

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 = x^2 \left(1 - x + \frac{11}{12}x^2 + o(x^2)\right) = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$$

5. La fonction

$$x \longmapsto (\ln(1+x))^2 (x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x))$$

admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 qui est

$$(x^2 + o(x^2)) (x + o(x)) = x^3 (1 + o(1)) (1 + o(1)) = x^3 (1 + o(1)) = x^3 + o(x^3).$$

Méthode 2.5 (Optimisation des calculs pour le produit)

On a vu dans les exemples précédents qu'il est plus efficace d'utiliser la forme normalisée des développements limités. Regardons les trois cas suivants :

- Un produit du type $(1 + \dots + o(x^4))(3 + \dots + o(x^3))$ donne un développement limité à l'ordre 3 seulement. Par exemple $(2 - x + x^3 + 2x^4 + o(x^4))(-1 + x^2 + x^2 + o(x^3))$
- Un produit du type $(x + \dots + o(x^4))(3 + \dots + o(x^3))$ donne un développement limité à l'ordre 4. Par exemple $(-x + x^3 + 2x^4 + o(x^4))(-1 + x^2 + x^2 + o(x^3))$.
- Un produit du type

$$(2x^3 + \dots + o(x^8))(-x^4 + \dots + o(x^{10})) = x^7(2 + \dots + o(x^5))(-1 + \dots + o(x^6))$$

donne un développement limité à l'ordre $7+5=12$ (plutôt que 8 en multipliant simplement).

Pour résumer, on met les développements limités sous forme normalisée, et on multiplie entre eux les développements limités qui restent grâce à la proposition 2.3.

Remarque.

Cette méthode est particulièrement adaptée au développement limité de $(f(x))^s$ si la valuation de la partie régulière est > 0 .

3 Composée et quotients de développements limités

Proposition 3.1

Soient f et g deux fonctions admettant un $DL_n(0)$ ($n \in \mathbb{N}$) et telles que $g(0) = 0$. Alors $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ obtenu en composant les parties régulières des $DL_n(0)$ de f et g en tranquant à l'ordre n .

Exemples.

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{\sin(x)}.$$

On cherche un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f sachant que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

au voisinage de 0. Or, au voisinage de 0, on a

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\varepsilon(y),$$

(ε nulle et continue en 0) donc

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + (\sin(x))^3 \varepsilon(\sin(x)) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

puisqu'au voisinage de 0

$$(\sin(x))^3 \varepsilon(\sin(x)) \sim x^3 \varepsilon(\sin(x)) = o(x^3),$$

donc

$$\begin{aligned} e^{\sin(x)} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} (x)^2 + \frac{1}{6} (x)^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3). \end{aligned}$$

2. On cherche un développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction g définie par

$$g(x) = \ln \left(\frac{\sin(x)}{x} \right),$$

sachant que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

On a au voisinage de 0

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

et de même

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + y^2 \varepsilon(y)$$

(où ε est nulle et continue en 0). On a donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)^2 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)^2 \varepsilon \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) \end{aligned}$$

Or,

$$\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)^2 \varepsilon \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) \sim x^4 \varepsilon \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) = o(x^4),$$

donc

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)^2 + o(x^4) \\ &= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{6} \right)^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4). \end{aligned}$$

Proposition 3.2 (Cas particulier de composition)

Si $f(0) = 0$ et f admet un développement limité à l'ordre n en 0

$$\sum_{k=1}^n a_k x^k + o(x^n),$$

la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 - f(x)}$$

admet un développement limité à l'ordre n en 0 qui est

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - f(x)} &= 1 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_k x^k \right)^j + o(x^n) \\ &= 1 + \left(\sum_{k=1}^n a_k x^k \right) + \left(\sum_{k=1}^n a_k x^k \right)^2 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^n a_k x^k \right)^n + o(x^n) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{n-j+1} a_k x^k \right)^j + o(x^n) \\ &= 1 + (a_1 x + \cdots + a_n x^n) + (a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})^2 + \cdots + (a_1 x + a_2 x^2)^{n-1} + (a_1 x)^n + o(x^n), \end{aligned}$$

où les puissances de x sont tronquées à l'ordre n .

Exemples.

1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1 + x).$$

On a bien $f(0) = 0$ et

$$f(x) = x - x^2 + 2x^3 + o(x^3),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - f(x)} &= 1 + (x - x^2 + 2x^3) + (x - x^2)^2 + (x)^3 + o(x^3) = 1 + (x - x^2 + 2x^3) + \\ &\quad (x^2 - 2x^3) + x^3 + o(x^3) = 1 + x + x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

où on a développé chaque produit en tronquant au fur et à mesure à l'ordre 3.

2. On a

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

(cf. la formule de Taylor-Young au théorème 4.3), donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \ln(1 + x)} &= 1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)^2 + \left(x - \frac{x^2}{2} \right)^3 + (x)^4 + o(x^4) \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) + \left(x^2 - x^3 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) x^4 \right) + \left(x^3 - \frac{3}{2} x^4 \right) + o(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Remarques.

1. Il ne faut jamais faire les calculs complètement, mais bien penser à tronquer à l'ordre n au fur et à mesure.
2. On peut remplacer dans l'énoncé la phrase "Si $f(0) = 0$ et f admet un développement limité à l'ordre n en 0" par "Si $f(x_0) = 0$ et f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 " et alors au voisinage de x_0 on a

$$\frac{1}{1 - f(x)} = 1 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_k (x - x_0)^k \right)^j + o(x - x_0)^n.$$

Méthode 3.3 (Quotient)

Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et si $f(0) \neq 0$, alors $1/f$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 qui est obtenu à l'aide du calcul

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(0)} \frac{1}{\frac{f(x)}{f(0)}} = \frac{1}{f(0)} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{f(x)}{f(0)}\right)}.$$

En posant $h(x) = 1 - \frac{f(x)}{f(0)}$, on a $h(0) = 0$, et on est ramené à la proposition 3.2.

Par produit, si une fonction g admet un développement limité à l'ordre n en 0, la fonction g/f également.

Exemple.

La fonction

$$x \longmapsto e^x + 1$$

vaut 2 en 0. Or, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{e^x + 1}{2}\right)}$$

et

$$1 - \frac{e^x + 1}{2} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + \frac{x^5}{240}\right) + o(x^5),$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x + 1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + \frac{x^5}{240} \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \right)^3 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \right)^4 - \left(\frac{x}{2} \right)^5 \right) + o(x^5) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + \frac{x^5}{240} \right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + \frac{7}{48}x^4 + \frac{x^5}{16} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{x^3}{8} + \frac{3}{16}x^4 + \frac{5}{32}x^5 \right) + \left(\frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{8} \right) - \left(\frac{x^5}{32} \right) \right) + o(x^5) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} - \frac{x^5}{480} + o(x^5). \end{aligned}$$

4 Intégration des DL et formule de Taylor-Young

4.1 Intégration d'un développement limité

Théorème 4.1

Si f est continue sur I et admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n,$$

toute primitive F de f admet un développement limité à l'ordre $n + 1$ en x_0

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} + o(x - x_0)^{n+1}$$

obtenu par intégration de la partie régulière du développement limité de f .

Remarque.

Attention, la réciproque est fautive. Si une fonction f est dérivable et admet un développement limité à l'ordre $n + 1$ en x_0 , sa dérivée n'admet pas nécessairement de développement limité. Par exemple, la fonction

$$x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 puisque

$$x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = o(x^2).$$

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}^* évidemment, mais également en 0 puisque le taux d'accroissement en 0 vaut $x^2 \sin(1/x^2)$ qui tend vers 0. Or, pour $x \neq 0$, sa dérivée vaut

$$3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

qui n'est pas continue en 0, donc f' n'admet même pas de développement limité à l'ordre 0 (proposition 1.9).

Méthode 4.2

Si f est une fonction de classe C^1 dont la dérivée f' admet un développement limité d'ordre n en x_0 , par intégration, f en admet un à l'ordre $n + 1$ en x_0 .

Exemple.

Puisque $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$, on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.3 (Formule de Taylor-Young)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de n -fois dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 qui est

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o(x - x_0)^n.$$

Remarque.

Cette proposition est peu utilisée en pratique. On s'en sert pour déterminer les développements limités des fonctions usuelles, puis on utilise plutôt les résultats sur les sommes, produits, quotients et composées de développements limités pour les calculs effectifs, *cf.* les exercices.

4.3 Développements limités des fonctions usuelles

Voici les développements limités usuels qu'il faut connaître ou savoir retrouver. On les obtient à l'aide de la proposition 4.1 ou du théorème 4.3. Ils sont tous en 0. Ils sont classés par "origine". Ceux à connaître sans réfléchir sont signalés par une étoile \star .