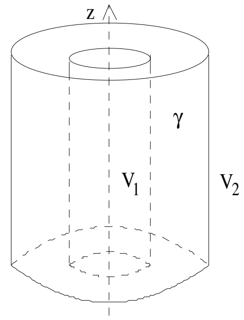
5.1.2 Conduction électrique-Exercice 1

On considère un cylindre métallique creux de rayon intérieur r_1, de rayon extérieur r_2, de hauteur h très grande et de conductivité électrique γ.
On repère un point M du métal par ses coordonnées cylindriques r, θ, z.
On impose les potentiels électriques $V(r_1) = V_1$ et $V(r_2) = V_2$.
On impose en plus un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme et stationnaire.



a-Appliquer, en régime permanent, le principe fondamental de la dynamique à une particule de charge q et de masse m, en tenant compte d'une force de frottement $\vec{F} = -m\vec{v}/\tau$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule et τ une constante.

On négligera le poids de la particule.

b-En déduire l'expression du vecteur densité volumique de courant sous la forme : $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + R_h \vec{j} \wedge \vec{B})$.
Déterminer γ et R_h en fonction de m, q, τ et de la densité volumique n des particules chargées.

c-Déterminer la résistance du cylindre. Comparer avec la valeur obtenue en l'absence de champ magnétique.

---

a-Dans un référentiel galiléen : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} - \dfrac{m}{\tau}\vec{v}$

En régime permanent $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ donc : $\boxed{\vec{0} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} - \dfrac{m}{\tau}\vec{v}}$

b-On a $\vec{j} = nq\vec{v}$ donc : $\vec{0} = q\vec{E} + q\dfrac{\vec{j}}{nq} \wedge \vec{B} - \dfrac{m}{\tau}\dfrac{\vec{j}}{nq}$ => $\vec{0} = \dfrac{nq^2\tau}{m}\vec{E} + \dfrac{\tau q}{m}\vec{j} \wedge \vec{B} - \vec{j}$

D'où : $\boxed{\vec{j} = \gamma(\vec{E} + R_h \vec{j} \wedge \vec{B})}$ avec $\boxed{\gamma = \dfrac{nq^2\tau}{m} \quad \text{et} \quad R_h = \dfrac{1}{nq}}$

c-Sous l'effet de la différence de potentiel, les courants circulent d'un cylindre vers l'autre.
L'intensité I est le flux de $\vec{j}$ à travers un cylindre d'axe Oz, de rayon r, de hauteur h, orienté selon $\vec{u}_r$.

$$I = \iint_{\text{cylindre}} \vec{j}.d\vec{S} = \iint_{\text{cylindre}} \vec{j}.dS\vec{u}_r = \iint_{\text{cylindre}} j_r.dS = j_r.2\pi rh \quad \text{donc : } j_r = \frac{I}{2\pi rh}$$

On relie j_r au champ électrique en projetant la relation du b- :

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + R_h \vec{j} \wedge \vec{B}) \Rightarrow \begin{vmatrix} j_r \\ j_\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \gamma R_h \begin{vmatrix} j_r \\ j_\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} j_r = \gamma E + \gamma R_h B j_\theta \\ j_\theta = -\gamma R_h B j_r \end{cases} \Rightarrow j_r = \frac{\gamma E}{1 + \gamma^2 R_h^2 B^2}$$

En égalant les deux expressions de j_r : $E = \dfrac{(1 + \gamma^2 R_h^2 B^2)I}{2\pi rh\gamma}$

Puis : $V_1 - V_2 = \displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}.d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \dfrac{(1 + \gamma^2 R_h^2 B^2)I}{2\pi rh\gamma} dr = I\dfrac{1 + \gamma^2 R_h^2 B^2}{2\pi h\gamma} \mathrm{Ln}\dfrac{r_2}{r_1}$

Par définition : $V_1 - V_2 = RI$ d'où : $\boxed{R = \dfrac{1 + \gamma^2 R_h^2 B^2}{2\pi h\gamma} \mathrm{Ln}\dfrac{r_2}{r_1}}$

<u>En l'absence de champ magnétique</u> (B = 0) on a : $R_0 = \dfrac{1}{2\pi h\gamma} \mathrm{Ln}\dfrac{r_2}{r_1}$

Pour un métal : $\gamma \approx 10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$; $R_h \approx 10^{-10}\ m^3.C^{-1}$
En prenant B = 1 T on a : $\gamma^2 R_h^2 B^2 \ll 1$ donc <u>$R \approx R_0$</u>