DEVOIR MAISON 9 (Intégration)

Corrigé

Problème 1 Extrait CCP PSI 2013

Q1. La fonction $k : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Elle est prolongeable par continuité en zéro par la valeur $\dfrac{1}{2}$ car $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ donc $\int_0^1 k(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Elle vérifie $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant k(t) \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge donc par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} k(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On conclut que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } K = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Notons que comme k est positive, cela revient à affirmer que k est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q2. Soit $A > 0$. La fonction sinus cardinal $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,A]$ et est prolongeable par continuité en zéro par la valeur 1 car $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'intégrale } D(A) = \int_0^{A} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Q3. Soit A et ε deux nombres réels tels que $0 < \varepsilon < A$. On réalise l'intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, A]$ où les fonctions $u : t \mapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^A u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1-\cos(A)}{A} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

L'équivalent $1-\cos(\varepsilon) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\varepsilon^2}{2}$ montre que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ et la majoration $\left|\frac{1-\cos(A)}{A}\right| \leqslant \frac{2}{A}$ montre que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1-\cos(A)}{A} = 0$.

On en déduit d'abord (en faisant tendre ε vers zéro) que

$$D(A) = \frac{1-\cos(A)}{A} + \int_0^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et ensuite (en faisant tendre A vers l'infini) que

$$\lim_{A\to+\infty} D(A) = K.$$

Donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge et } K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} D(A).}$$

Q4. On pose

$$\ell : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx}.$$

On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètre (qui assure en même temps la définition) :

$\boxed{1}$ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \mapsto \ell(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{2}$ On a la domination $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $|\ell(x,t)| \leqslant k(t)$, où la fonction k, définie à la première question, est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est bien indépendante de x).

Notons qu'on a bien également (même si la vérification de cette hypothèse n'est pas exigée par le programme) pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la continuité par morceaux de l'application $t \mapsto \ell(x,t)$ sur $]0,+\infty[$.
On conclut alors que :

$$\boxed{\text{l'application } L : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-tx}\,\mathrm{d}t \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

Q5. On vérifie les hypothèses du théorème de classe $\mathscr{C}^2$ des intégrales à paramètres.

$\boxed{1}$ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \ell(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial \ell}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos(t)}{t} e^{-tx} \text{ et } \frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos(t))e^{-tx}.$$

$\boxed{2}$ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
La fonction $t \mapsto \ell(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a vu que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|\ell(x,t)| \leqslant k(t)$ avec k intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où le résultat par comparaison par inégalité).
La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \ell}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 (puisque $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$).
On a de plus $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 \left|\dfrac{\partial \ell}{\partial x}(x,t)\right| = \lim\limits_{t\to+\infty} (1-\cos t)te^{-xt} = 0$ car $t \mapsto 1-\cos(t)$ est bornée et croissances comparées ($x > 0$).
On a donc $\left|\dfrac{\partial \ell}{\partial x}(x,t)\right| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \ell}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{3}$ Pour tout $a \in]0,+\infty[$, on dispose la domination :

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times \mathbb{R}_+^* \mapsto \left|\frac{\partial^2 \ell}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \psi_a(t) := 2e^{-ta},$$

et la fonction ψ_a est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après le cours (intégrale de référence avec $a > 0$) (et bien indépendante de x).

On conclut que L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a,+\infty[$, et qu'on a les formules suivantes, valables pour tout $x \in [a,+\infty[$:

$$\boxed{\begin{aligned} L'(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t} e^{-tx}\,\mathrm{d}t, \\ L''(x) &= \int_0^{+\infty} (1-\cos(t))e^{-tx}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}}$$

L'appartenance à la classe $\mathcal{C}^2$ étant une propriété locale et ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'application } L \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur l'intervalle }]0,+\infty[\text{ et les formules sont valables pour tout } x \in]0,+\infty[.}$$

Q6. Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée à paramètre continu.

$\boxed{1}$ Soit $t \in]0,+\infty[$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-tx} = 0$ donc par produit avec une constante, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell(x,t) = 0$.

$\boxed{2}$ On a la domination $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, $|\ell(x,t)| \leqslant k(t)$, où la fonction k, définie à la première question, est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est bien indépendante de x).

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} L(x) = 0.}$$

$\boxed{1}$ Soit $t \in]0,+\infty[$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-tx} = 0$ donc par produit avec une constante, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\partial \ell}{\partial x}(x,t) = 0$.

$\boxed{2}$ Notons que l'on peut utiliser le théorème avec $[1,+\infty[$ comme intervalle pour x car $+\infty$ est bien une borne de cet intervalle.
On a la domination $\forall (x,t) \in [1,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial \ell}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{1-\cos(t)}{t} e^{-tx} \leqslant \dfrac{1-\cos(t)}{t} e^{-t} = \left|\dfrac{\partial \ell}{\partial x}(1,t)\right|$,
et $t \mapsto \dfrac{\partial \ell}{\partial x}(1,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (vu en **Q5.**) (elle est bien indépendante de x).

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} L'(x) = 0.}$$

Q7. Pour tout réel $x > 0$, on a (la convergence de chacune des intégrales écrites ci-dessous justifie le calcul, on a en effet $|e^{(i-x)t}| = e^{-xt}$ d'où la convergence absolue) :

$$\begin{aligned}
L''(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left[\frac{1}{-x+i} e^{it} e^{-xt}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{-x+i}\right) \quad \left(t \mapsto e^{it} \text{ est bornée donc } \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{-x+i} e^{it} e^{-xt} = 0\right) \\
&= \frac{1}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{-x-i}{x^2+1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0,+\infty[,\ L''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.}$$

Q8. D'après la formule ci-dessus, il existe une constante $c' \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad L'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c' = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + c'.$$

Comme on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} L'(x) = 0$, on en déduit que $c' = 0$, donc que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad L'(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Notons $h : x \mapsto -\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \arctan(x)$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{x}{2}\left(\frac{-2}{x^3}\right)\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = L'(x).$$

On en déduit qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + c.$$

Comme $-\dfrac{x}{2}\ln(1+\dfrac{1}{x^2}) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{2}\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{2x}$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = -\dfrac{\pi}{2} + c$.
Comme on sait par ailleurs que $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = 0$, on conclut que $c = \dfrac{\pi}{2}$, donc que :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.}$$

Comme la fonction L est continue en zéro, on obtient, en prenant la limite du membre de droite en zéro, que $L(0) = \frac{\pi}{2}$.
En utilisant le définition de la fonction L, on trouve finalement que :

$$\boxed{L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\pi}{2}.}$$

Q9. La fonction $m : u \mapsto \frac{\ln(u)}{u-1}$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
⋆ On a $|m(u)| \underset{u\to 0}{\sim} -\ln(u)$.
Comme pour tout $u \in]0,1[$, $-\ln(u) \geqslant 0$ et l'intégrale $\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$ converge (par le cours), on en déduit par comparaison que m est intégrable en 0.
⋆ On a $|m(u)| = \frac{\ln(1+u-1)}{u-1} \underset{u\to 1}{\sim} \frac{u-1}{u-1} = 1$.
La fonction m est donc prolongeable par continuité en 1 donc elle est intégrable en 1.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } u \mapsto \frac{\ln(u)}{u-1} \text{ est intégrable sur }]0,1[.}$$

Q10. Soit $k \in \mathbb{N}$.
La fonction $m_k : u \mapsto u^k \ln(u)$ est continue par morceaux sur $]0,1]$. On a par intégration par parties (les fonctions en jeu sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) pour tout $\varepsilon \in]0,1]$:

$$\int_\varepsilon^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{k+1}\ln(u)}{k+1}\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 u^k\,\mathrm{d}u = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln(\varepsilon)}{k+1} - \frac{1-\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{(k+1)^2}$$

par croissances comparées.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u \text{ converge et a pour valeur } \int_0^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{(k+1)^2}.}$$

Q11. La somme de la série géométrique $\forall u \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ permet d'écrire que

$$\forall u \in]0,1[, \quad m(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} m_k(u), \quad \text{où} \quad m_k(u) = u^k \ln(u).$$

Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme.

$\boxed{1}$ La série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} m_k$ converge simplement sur $]0,1[$.

$\boxed{2}$ D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction m_k est intégrable sur $]0,1[$ (puisqu'elle est de signe constant sur $]0,1[$ donc son intégrale sur $]0,1[$ est absolument convergente).

$\boxed{3}$ La série numérique de terme général $\int_0^1 |m_k(u)|\,\mathrm{d}u$ converge puisqu'il s'agit de la série de terme général $\frac{1}{(k+1)^2}$ (série de Riemann avec $2 > 1$ après glissement d'indice).

On en déduit que m est intégrable sur $]0,1[$ (on le savait déjà) et on a l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} m_k(u)\right)\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 m_k(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k)^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Q12. Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes.
On suppose que :

$\boxed{1}$ La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f (continue par morceaux sur I).

$\boxed{2}$ Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors f et les f_n sont intégrables sur I, la suite de terme général $\int_I f_n$ converge, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

Q13. On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) définies par $\forall t \in [0,1[,\ f_n(t) = f(t^n)$.

$\boxed{1}$ Soit $t \in [0,1[$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t^n) = f(0)$ par continuité de f en 0.
Ainsi, la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction constante $f : t \mapsto f(0)$

$\boxed{2}$ Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée.
La fonction constante $\varphi = \|f\|_\infty^{[0,1]}$ est continue par morceaux sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $[0,1[$ et elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1[,\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t) \text{ (puisque } t^n \in [0,1]).$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t = f(0).}$$

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose le changement de variable $t = u^{1/n}$ dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$ (car $t \mapsto f(t^n)$ est continue sur le segment $[0,1]$). On obtient une nouvelle intégrale qui est aussi convergente et de même valeur.
On a alors :

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 f(u)u^{-1+1/n}\,\mathrm{d}u, \quad \text{ou encore} \quad nI_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}u^{1/n}$.
Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée.

$\boxed{1}$ Soit $u \in]0,1]$.
Comme $u^{1/n} = \exp(\frac{\ln(u)}{n})$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(u) = \dfrac{f(u)}{u}$.
Ainis, la suite (g_n) converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$.

$\boxed{2}$ On dispose de l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in]0,1],\ |g_n(u)| \leqslant |g(u)|$ car $0 \leqslant u^{1/n} \leqslant 1$.
Or, $|g|$ est intégrable sur $]0,1]$ par hypothèse (puisque g l'est).

On conclut que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

Q15. La question précédente (applicable puisque le sinus est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge absolument) donne :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On remarque que $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est continue et positive, non identiquement nulle sur $]0,1]$ et donc son intégrale est strictement positive donc n'est pas nulle.
Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 \sin(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

MINES Maths 1 PC 2024

Eléments de correction

1 ▻ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynômiale en $|x|$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant |P(x)| \quad \text{avec} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k$$

Notons $C = \sum_{k=0}^{d} |a_k|$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant 1$, par l'inégalité triangulaire :

distinguer les cas $|x| \leqslant 1$ et $|x| > 1$ est assez classique

$$|P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^k \leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k| = C \leqslant C(1 + |x|^d)$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| > 1$, si $k \in [\![0, d]\!]$, $|x|^k \leqslant |x|^d$; donc par l'inégalité triangulaire :

$$|P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k |x|^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^k \leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k||x|^d = C|x|^d \leqslant C(1 + |x|^d)$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant |P(x)| \leqslant C(1 + |x|^d)$$

Donc f est à croissance lente.

Autre rédaction possible : on a $P(x) \underset{|x| \to +\infty}{\sim} a_d |x|^d$ donc $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{|P(x)|}{1 + |x|^d} = |a_d|$: la fonction continue $x \mapsto \frac{|P(x)|}{1+|x|^d}$ possède une limite finie en $\pm\infty$ donc elle bornée sur $\mathbb{R}$.

autre rédaction en étudiant les limites en $\pm\infty$ à l'aide de l'équivalent $P(x) \sim a_d|x|^d$

Cette dernière propriété n'étant pas explicitement dans le programme officiel, il faudrait rédiger un peu plus précisément :

$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{|P(x)|}{1 + |x|^d} = |a_d|$ donc il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $|x| \geqslant A$, $\frac{|P(x)|}{1 + |x|^d} \leqslant |a_d| + 1$.

Et $x \mapsto \frac{P(x)}{1 + |x|^d}$ est continue sur le segment $[-A, A]$, donc elle est bornée sur $[-A, A]$: il existe $K \geqslant 0$ tel que pour tout $|x| \leqslant A$, $\frac{|P(x)|}{1 + |x|^d} \leqslant K$.

On a alors en posant $C = \max(|a_d| + 1, K)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|P(x)| \leqslant C(1 + |x|^d)$.

2 ▻ Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$.

La fonction φ étant continue, on a $f\varphi \in C^0(\mathbb{R})$ par produit de fonctions continues.

Soit $C \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant C(1 + |x|^k)$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)\varphi(x)| \leqslant C(1 + |x|^k)\varphi(x)$$

On a par croissance comparée $\lim_{|x| \to +\infty} x^2 e^{-x^2/2} = 0$ et $\lim_{|x| \to +\infty} |x|^{k+2} e^{-x^2/2} = 0$; par conséquent,

comparaison classique $f(x)\varphi(x) \underset{|x| \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$\lim_{|x| \to +\infty} Cx^2(1+|x|^k)\varphi(x) = 0 \quad \text{donc} \quad C(1+|x|^k)\varphi(x) \underset{|x| \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{d'où} \quad f(x)\varphi(x) \underset{|x| \to \infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ et en $-\infty$ (intégrale de Riemann) donc $f\varphi$ est intégrable en $+\infty$ et en $-\infty$ d'où $f\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ c'est à dire :

$$f \in L^1(\varphi)$$

les résultats des questions 1 et 2 vont être très utiles dans les questions qui suivent pour justifier l'intégrabilité de certaines fonctions

3 ▻

- la fonction nulle appartient clairement à $CL(\mathbb{R})$.
- Soit f, g deux fonctions appartenant à $CL(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $C_f, C_g \in \mathbb{R}_+$ et $k_f, k_g \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant C_f\left(1+|x|^{k_f}\right) \quad \text{et} \quad |g(x)| \leqslant C_g\left(1+|x|^{k_g}\right)$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\alpha f(x)+g(x)| \leqslant |\alpha f(x)|+|g(x)| \leqslant |\alpha| C_f\left(1+|x|^{k_f}\right)+C_g\left(1+|x|^{k_g}\right)$$

Donc $\alpha f+g$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en $|x|$ donc d'après la question 1, $\alpha f+g \in CL(\mathbb{R})$.

$CL(\mathbb{R})$ est donc stable par combinaison linéaire, et contient la fonction nulle ; $CL(\mathbb{R})$ est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

la stabilité par combinaison linéaire s'obtenait assez facilement en utilisant la question 1

- *Stabilité de $CL(\mathbb{R})$ pour le produit.* Soit $f, g \in CL(\mathbb{R})$. On garde les notations précédentes, $C_f, C_g \in \mathbb{R}_+$ et $k_f, k_g \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) g(x)| \leqslant C_f C_g\left(1+|x|^{k_f}\right)\left(1+|x|^{k_g}\right)$$

Donc fg est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en $|x|$ d'où d'après la question 1, $fg \in CL(\mathbb{R})$.

l'utilisation de la question 1 était encore utile ici

4 $\rhd$ Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $g_x : y \mapsto f\left(e^{-t} x+\sqrt{1-e^{-2t}} y\right)$. Montrons que $g_x \in L^1(\varphi)$.

On a $g_x \in C^0(\mathbb{R})$ par composée de fonctions continues, f étant continue.

De plus, f appartenant $CL(\mathbb{R})$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |g_x(y)| \leqslant C\left(1+\left|e^{-t} x+\sqrt{1-e^{-2t}} y\right|^k\right) \leqslant C\left(1+\left(e^{-t}|x|+\sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right)$$

Donc g_x est majorée par une fonction polynômiale en $|y|$ donc g_x est à croissante lente d'après la question 1.

Donc $g_x \in C^0 \cap CL(\mathbb{R})$ donc $g_x \in L^1(\varphi)$ d'après la question 2.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t} x+\sqrt{1-e^{-2t}} y\right) \varphi(y) \mathrm{d} y$ est convergente, ce qui montre que $P_t(f)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- *Linéarité de P_t.* Soit $f, g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
  Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
P_t(\alpha f+g) & =\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha f+g)\left(e^{-t} x+\sqrt{1-e^{-2t}} y\right) \varphi(y) \mathrm{d} y \\
& =\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t} x+\sqrt{1-e^{-2t}} y\right) \varphi(y) \mathrm{d} y+\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(e^{-t} x+\sqrt{1-e^{-2t}} y\right) \varphi(y) \mathrm{d} y \\
& =\alpha P_t(f)+P_t(g)
\end{aligned}$$

5 $\rhd$ Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $C \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant C\left(1+|x|^k\right)$.

On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée à paramètre continu :

- soit $y \in \mathbb{R}$. Par continuité de f en y, $\lim\limits_{t \rightarrow+\infty} f\left(e^{-t} x+\sqrt{1-e^{-2t}} y\right)=f(y)$ donc

$$\lim_{t \rightarrow+\infty} f\left(e^{-t} x+\sqrt{1-e^{-2t}} y\right) \varphi(y)=f(y) \varphi(y)$$

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left|f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\right| &\leqslant C\left(1+\left|e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^k\right)\varphi(y)\\ &\leqslant C\left(1+\left(e^{-t}|x|+\sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right)\varphi(y)\\ &\leqslant C\left(1+(|x|+|y|)^k\right)\varphi(y)\end{aligned}$$

Et la fonction $y \mapsto C\left(1+(|x|+|y|)^k\right)\varphi(y)$ est intégrable car $P : y \mapsto C\left(1+(|x|+|y|)^k\right)$ est polynômiale en $|y|$ donc à croissance lente d'après **1** et continue donc $P \in L^1(\varphi)$ d'après **2**.

application du théorème de convergence dominée, il faut majorer indépendamment de t en utilisant : $e^{-t} \leqslant 1$ et $\sqrt{1-e^{-2t}} \leqslant 1$

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} P_t(f)(x) &= \lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(y)\ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

6 ▷ Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$. Montrons que $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R})$ par le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par continuité de f.
- *Hypothèse de domination locale :* pour tout $a > 0$, pour tout $x \in [-a, a]$, et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

théorème de continuité des intégrales à paramètres, il faut majorer ici indépendamment de x

$$\begin{aligned}\left|f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\right| &\leqslant C\left(1+\left(e^{-t}|x|+\sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^k\right)\varphi(y)\\ &\leqslant C\left(1+(a+|y|)^k\right)\varphi(y)\end{aligned}$$

Et la fonction (indépendante de x), $y \mapsto C\left(1+(a+|y|)^k\right)\varphi(y)$ est intégrable car $P : y \mapsto C\left(1+(a+|y|)^k\right)$ est polynômiale en $|y|$ et continue donc $P \in L^1(\varphi)$ d'après 1 et 2 (même argument qu'à la question précédente).

Donc l'application $P_t(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|P_t(f)(x)| &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\right|\varphi(y)\ \mathrm{d}y \quad \text{(ineg. triangulaire)}\\ &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} C\left(1+(|x|+|y|)^k\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y \quad \text{car } f \in CL(\mathbb{R}) \text{ et } \left\{\begin{array}{l} e^{-t} \leqslant 1\\ \sqrt{1-e^{2t}} \leqslant 1\end{array}\right.\\ &\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|y|^{k-j}|x|^j\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y \quad \text{(binôme de Newton)}\\ &\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\ \mathrm{d}y + C\sum_{j=0}^{k}\left[\binom{k}{j}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^{k-j}\varphi(y)\ \mathrm{d}y\right]|x|^j \quad \text{linéarité}\\ &\leqslant C\left(1+\sum_{j=0}^{k}a_j|x|^j\right) \quad \text{avec } a_j = \binom{k}{j}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^{k-j}\varphi(y)\ \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Donc $P_t(f)$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en $|x|$, indépendante de t.
Donc d'après la question 1, $P_t(f) \in CL(\mathbb{R})$.
De plus, $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R})$ d'après la première partie de la question, donc $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ donc d'après la question 2, $P_t(f) \in L^1(\varphi)$.

7 ▷ Commençons par justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x$.

f' et g' sont continues et à croissante lente donc d'après la question 3, $f'g'$ est à croissance lente (et continue par produit de fonctions continues) : $f'g' \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ donc d'après la question 2, $f'g' \in L^1(\varphi)$ d'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x$.

On va effectuer une intégration par parties en remarquant que $(f'\varphi)' = L(f)\varphi$.

attention à bien justifier la convergence de l'une des deux intégrales, et étudier le crochet pour pouvoir effectuer l'intégration par parties

On a $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} f'(x)\varphi(x)g(x) = 0$ par croissance comparée car $f'g \in CL(\mathbb{R})$ par produit de fonctions à croissance lente.

Par conséquent, par le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty}(f'\varphi)'g$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f'\varphi g'$ sont de même nature (convergente) et :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x)g(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f'\varphi\right)'(x)g(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\left[f'(x)\varphi(x)g(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)g'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

8 ▻ Soit $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ telle que $f' \in CL(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Notons pour $(t,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $F(t,y) = f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$.

On a :

on applique le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre

- pour tout $t > 0$, $y \mapsto f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (déjà vu à la question 4).
- pour tout $y \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\exp \in C^1(\mathbb{R})$, et $t \mapsto \sqrt{1-e^{-2t}}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
- *hypothèse de domination* : soit $a > 0$, pour tout $(t,y) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}$:
  $f' \in CL(\mathbb{R})$ donc il existe $C' \geqslant 0$ et $k' \in \mathbb{N}$, tels que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $f'(u) \leqslant C'(1+|u|^{k'})$ d'où :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial F}{\partial t}(t,y)\right| &= \left|-e^{-t}x + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right| \cdot \left|f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\right|\varphi(y) \\
&\leqslant \left(e^{-t}|x| + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}|y|\right) C'\left(1 + \left|e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right|^{k'}\right)\varphi(y) \quad \text{car } f' \in CL(\mathbb{R}) \\
&\leqslant C'\left(|x| + \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2a}}}|y|\right)\left(1 + (|x|+|y|)^{k'}\right)\varphi(y) \quad \text{(inégalité triangulaire)}
\end{aligned}$$

  Et l'application $y \mapsto C'\left(|x| + \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2a}}}|y|\right)\left(1+(|x|+|y|)^{k'}\right)\varphi(y)$ est indépendante de t, intégrable sur $\mathbb{R}$, car $y \mapsto C'\left(|x| + \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2a}}}|y|\right)\left(1+(|x|+|y|)^{k'}\right)$ est une application polynômiale en $|y|$ et continue donc appartient à $L^1(\varphi)$ d'après 1 et 2.

Les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètres sont vérifiées, donc $t \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-xe^{-t} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right) f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y$$

9 ▻ On applique à nouveau le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (cas $\mathcal{C}^2$).

théorème de dérivation des intégrales à paramètres (cas C^2)

Ici, $t \in \mathbb{R}_+$ est fixé.

On note pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $G(x,y) = f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$.

- pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto G(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions C^2 sur $\mathbb{R}$, f étant supposée de classe C^2.
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, les applications $y \mapsto G(x,y)$ et $y \mapsto \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$; en effet :
  — $y \mapsto G(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cf question 4)

— pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = e^{-t} f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ et $f' \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$, on en déduit comme à la question 4 (en remplaçant f par f') que $y \mapsto f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- hypothèse de domination. Pour tout $x \in [-a,a]$, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

technique de majoration identique aux questions précédentes

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y)\right| &= e^{-2t}\left|f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\right|\varphi(y) \\
&\leqslant e^{-2t}C''\left(1+\left(e^{-t}|x| + \sqrt{1-e^{-2t}}|y|\right)^{k''}\right)\varphi(y) \quad \text{car } f'' \in CL(\mathbb{R}) \\
&\leqslant C''\left(1+(|x|+|y|)^{k''}\right)\varphi(y) \leqslant C''\left(1+(a+|y|)^{k''}\right)\varphi(y)
\end{aligned}$$

Et l'application $y \mapsto C''\left(1+(a+|y|)^{k''}\right)\varphi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes raisons que celles données pour l'intégrabilité du majorant trouvé à la question précédente.

Par conséquent, $P_t(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y)\ \mathrm{d}y$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{lcl}
P_t(f)'(x) &=& e^{-t}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y \\
P_t(f)''(x) &=& e^{-2t}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y
\end{array}\right.$$

10 ▻ Soit $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ telle que f' et f'' soient à croissante lente.
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
On a

$$\varphi'(y) = -y\varphi(y) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dy}\left(f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\right) = \sqrt{1-e^{-2t}}f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)$$

et

$$\lim_{|y|\to+\infty} f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y) = 0 \qquad \text{car } f' \in CL(\mathbb{R})$$

Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\int_{-\infty}^{+\infty} yf'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y &= e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} f''\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y \\
&= P_t(f)''(x)
\end{aligned}$$

Donc d'après les questions 8 et 9, et linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-xe^{-t} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right)f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y \\
&= -xP_t(f)'(x) + P_t(f)''(x) = L\left(P_t(f)\right)(x)
\end{aligned}$$

11 ▻ Notons pour tout $t > 0$, $h(t) = t\ln(t)$. h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t > 0$, $h'(t) = \ln(t) + 1$.
On a $h'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(t) \geqslant -1 \Leftrightarrow t \geqslant e^{-1}$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0$ par croissance comparée.
D'où le tableau de variations :

t	0		e^{-1}		$+\infty$
$h(t)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Donc h est prolongeable par continuité en 0, en posant $h(0) = 0$. On notera encore h la fonction ainsi prolongée sur $[0,+\infty[$.

12 ▻ Soit $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ à valeurs strictement positives telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 1$.

L'application $x \mapsto h\left(g(x)\right)\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par continuité de g, h, φ et $g(x) > 0$.

D'après la question précédente, pour tout $t \in]0,1]$, $|h(t)| \leqslant e^{-1}$ et h est croissante et positive sur $[1, +\infty[$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{ll} \text{si } g(x) \geqslant 1 & |h\left(g(x)\right)| = h\left(g(x)\right) \leqslant h\left(C\left(1+|x|^k\right)\right) \\ \text{si } g(x) < 1 & |h(g(x))| \leqslant e^{-1} \end{array}$$

Donc

inégalité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour tout $u > -1$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad |h\left(g(x)\right)| &\leqslant e^{-1} + h\left[C\left(1+|x|^k\right)\right] \\ &\leqslant e^{-1} + C\left(1+|x|^k\right)\left(\ln(C) + \ln\left(1+|x|^k\right)\right) \quad \text{en supposant } C > 0 \\ &\leqslant e^{-1} + C\left(1+|x|^k\right)\left(\ln(C) + |x|^k\right) \quad \text{car } \ln(1+|x|^k) \leqslant |x|^k \end{aligned}$$

Donc la fonction continue $h \circ g$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynômiale en $|x|$, elle appartient donc (question 1) à $C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ donc d'après la question 2, $h \circ g \in L^1(\varphi)$: par conséquent $x \mapsto \ln\left(g(x)\right)g(x)\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathrm{Ent}_\varphi(g)$ est bien définie.

toujours l'utilisation des questions 1 et 2 pour justifier l'intégrabilité

13 ▻ Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

on applique la question précédente en vérifiant que $P_t(f)$ vérifie bien toutes les hypothèses

- D'après les questions 1 et 6, $P_t(f) \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$.
- $P_t(f)$ est à valeurs strictement positives , car définie par l'intégrale d'une fonction continue à valeurs strictement positives : pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y) > 0$ car f à valeurs strictement positives.
- Et d'après le résultat admis après la question 6 :

cette hypothèse n'a pas servie à la question précédente mais l'entropie n'est définie dans l'énoncé que pour des fonctions vérifiant cette égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 1$$

Donc $P_t(f)$ vérifie les hypothèses de la question précédente, par conséquent $S(t) = \mathrm{Ent}_\varphi\left(P_t(f)\right)$ est bien définie.

14 ▻ On suit l'indication. Soit $x \in \mathbb{R}$. on note $F(t,y) = f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$. On a :

- pour tout $y \in \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t,y)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$|F(t,y)| = \left|f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\right|\varphi(y) \leqslant C\left(1 + (|x|+|y|)^k\right)\varphi(y)$$

  Et $y \mapsto C\left(1 + (|x|+|y|)^k\right)\varphi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cf question 5).

Donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $t \mapsto P_t(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons maintenant que $S : t \mapsto \mathrm{Ent}_\varphi\left(P_t(f)\right)$ est continue.
Notons $H(t,x) = \ln\left(P_t(f)(x)\right)P_t(f)(x)\varphi(x) = h\left(P_t(f)(x)\right)\varphi(x)$.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto H(t,x)$ est continue par continuité de $t \mapsto P_t(f)(x)$ (à valeurs strictement positives), continuité de h et de φ.
- *hypothèse de domination* : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  en utilisant que $P_t(f)$ est majorée par une fonction polynômiale en $|x|$, indépendante de t d'après la question 6, on peut alors majorer d'après la question 1, $|P_t(f)(x)| \leqslant C\left(1+|x|^k\right)$ et par la majoration déjà vue à la question 12 :

l'utilisation du résultat de la question 6 permettait de majorer simplement $P_t(f)(x)$ indépendamment de t

$$|h\left(P_t(f)(x)\right)| \leqslant e^{-1} + h\left[C\left(1+|x|^k\right)\right]$$

  Et par conséquent,

$$|H(t,x)| = |h\left(P_t(f)(x)\right|\varphi(x) \leqslant \left(e^{-1} + h\left[C\left(1+|x|^k\right)\right]\right)\varphi(x)$$

Et on a déjà justifié à la question 12 que l'application $x \mapsto \left(e^{-1} + h\left[C\left(1+|x|^k\right)\right]\right)\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, S est continue sur $\mathbb{R}_+$.

15 ▻ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_0(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x)$$

Par conséquent,

$$S(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(P_0(f)(x)\right)P_0(f)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\ln\left(f(x)\right)f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \mathrm{Ent}_\varphi(f)$$

Pour montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = 0$, on applique le théorème de convergence dominée à paramètre continu :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la question 5, $\lim\limits_{t\to+\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi(y)\mathrm{d}y = 1$ donc

$$\lim_{t\to+\infty}\ln\left(P_t(f)(x)\right)P_t(f)(x)\varphi(x) = 0$$

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la même majoration qu'à la question 14

$$\left|\ln\left(P_t(f)(x)\right)P_t(f)(x)\varphi(x)\right| \leqslant \left(e^{-1} + h\left[C\left(1+|x|^k\right)\right]\right)\varphi(x)$$

Et $x \mapsto \left(e^{-1} + h\left[C\left(1+|x|^k\right)\right]\right)\varphi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cf question 12).

Donc d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu :

$$\lim_{t\to+\infty} S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty}\ln\left(P_t(f)(x)\right)P_t(f)(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$$

16 ▻ Conséquence immédiate de l'égalité de la question 10.

17 ▻ Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On utilise la question précédente et la question 7 comme indiqué dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}
-S'(t) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} L\left(P_t(f)(x)\right)\left[1 + \ln\left(P_t(f)(x)\right)\right]\varphi(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)'(x)\left(1 + \ln\circ P_t(f)\right)'(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{d'après q7} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)'(x)\frac{P_t(f)'(x)}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\ \mathrm{d}x \\
&= e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{car } P_t(f)'(x) = e^{-t}P_t(f')(x) \text{ d'après q10}
\end{aligned}$$

18 ▻ Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué dans l'espace euclidien $C^1(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)\varphi(y)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
P_t(f')^2(x) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y\right)^2 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)}\left[\frac{f'\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\sqrt{\varphi(y)}}{\sqrt{f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)}}\right]\ \mathrm{d}y\right)^2 \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'^2}{f}\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\varphi(y)\ \mathrm{d}y\right) \\
&\leqslant P_t(f)(x)P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)
\end{aligned}$$

Or $P_t(f)(x) > 0$ d'où $\dfrac{P_t(f')^2(x)}{P_t(f)(x)} \leqslant P_t\left(\dfrac{f'^2}{f}\right)(x)$; donc par croissance de l'intégrale et la question précédente :

$$-S'(t) = e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)}\varphi(x)\ \mathrm{d}x \leqslant e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x$$

19 ▻ D'après le résultat admis entre la question 6 et 7, appliqué à la fonction $\dfrac{f'^2}{f} \in C^0(\mathbb{R}) \cap CL(\mathbb{R})$ (hypothèse faite dans cette partie) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\ \mathrm{d}x$$

Donc d'après la question précédente,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad -S'(t) \leqslant e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\ \mathrm{d}x$$

20 ▻ On a d'après la question 15 et continuité de S en 0 :

$$\int_0^{+\infty} -S'(t)\ \mathrm{d}t = S(0) - \lim_{t\to+\infty} S(t) = \mathrm{Ent}_\varphi(f)$$

Et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ donc d'après la question précédente et par croissance de l'intégrale en notant $K = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\ \mathrm{d}x$:

$$\int_0^{+\infty} -S'(t)\ \mathrm{d}t \leqslant K\int_0^{+\infty} e^{-2t}\ \mathrm{d}t \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{Ent}_\varphi(f) \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)}\varphi(x)\ \mathrm{d}x$$