DM10 (Espaces euclidiens)
Pour le mercredi 4 février, à l'oral

Problème : Factorisation QR

Notations
Pour tous n, $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note φ_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX.
Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A.
L'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. En identifiant $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^\mathsf{T} Y, \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geqslant 2$.

Partie I – Matrices de Householder

I.1 – Un exemple

On définit :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Q1. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.

Q2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Q3. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

Q4. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telles que $P^\mathsf{T} A P = D$.

Q5. Interpréter géométriquement l'endomorphisme φ_A de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

I.2 – Matrices de Householder

Soit $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. On définit P_V, $Q_V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} V V^\mathsf{T} \quad \text{et} \quad Q_V = \mathrm{I}_n - 2\frac{1}{\|V\|^2} V V^\mathsf{T}. \tag{1}$$

Q6. Montrer que $\mathrm{Im}(P_V) = \mathrm{Vect}(V)$ et que $\mathrm{Ker}(P_V) = \mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Q7. Montrer que φ_{P_V} est la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(V)$.
Préciser le rang et la trace de la matrice P_V.

Q8. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.

Q9. Montrer que φ_{Q_V} est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(V)^\perp$.

Partie II – Factorisation QR

II.1 – Un résultat préliminaire

Soient $U, V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|U\| = \|V\|$. On note $D = \text{Vect}(U - V)$.

Q10. Montrer que $D^\perp$ est l'ensemble des $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|X - U\| = \|X - V\|$.

Q11. Donner la décomposition de U sur la somme directe $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.

Q12. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$ où Q_{U-V} est définie en (1).

Q13. En déduire que pour tous $\tilde{U}$, $\tilde{V} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q, telle que $Q\tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

II.2 – Factorisation QR

Q14. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1, telle que $Q_1 A$ soit de la forme :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Q15. En raisonnant par récurrence sur n, montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.